

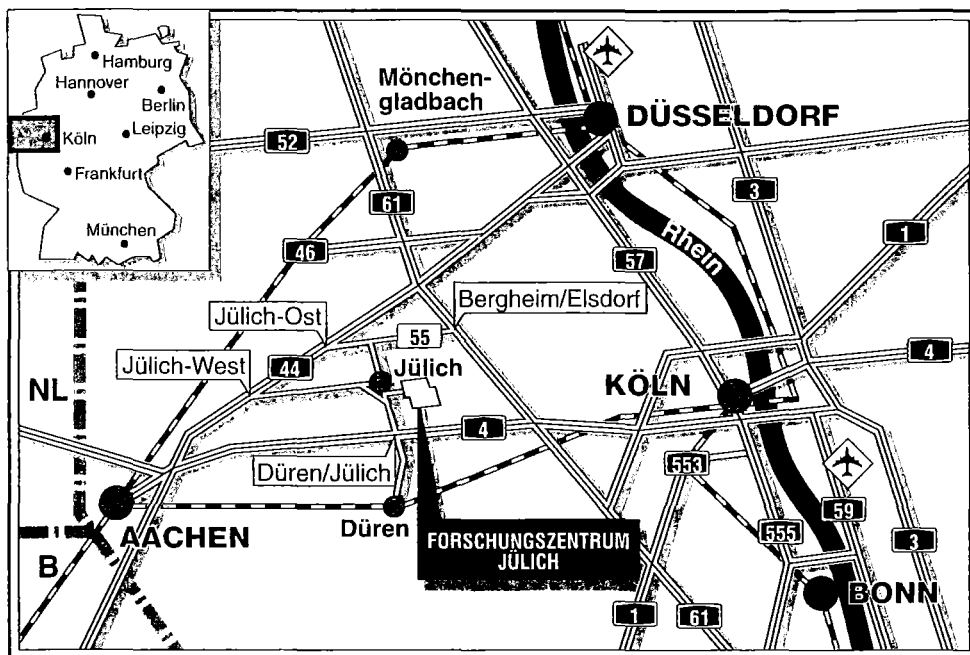


Höchstleistungsrechenzentrum

Nichtlineare Dynamik in der Analyse neurowissenschaftlicher Systeme

***Vom Nachweis von Nichtlinearität in biologischen
Neuronenverbänden zum Konzept der konsistenten
neuronalen Selbstkontrolle in chaotischen Neuromodulen***

Nikolaus Stollenwerk



Berichte des Forschungszentrums Jülich ; 3491

ISSN 0944-2952

Höchstleistungsrechenzentrum Jülich-3491

D 104 (Diss. Technische Universität Clausthal)

Zu beziehen durch: Forschungszentrum Jülich GmbH · Zentralbibliothek

D-52425 Jülich · Bundesrepublik Deutschland

☎ 02461/61-6102 · Telefax: 02461/61-6103 · e-mail: zb-publikation@fz-juelich.de

Nichtlineare Dynamik in der Analyse neurowissenschaftlicher Systeme

***Vom Nachweis von Nichtlinearität in biologischen
Neuronenverbänden zum Konzept der konsistenten
neuronalen Selbstkontrolle in chaotischen Neuromodulen***

Nikolaus Stollenwerk

Zusammenfassung:

Ziel der Arbeit ist die Evaluierung der Kenntnisse der nichtlinearen Dynamik für (i) die Datenanalyse in neurobiologischen Systemen wie dem Beispiel des hier näher betrachteten Hippocampus so wie für (ii) weitergehende theoretische Konzepte der Neurodynamik biologischer sowie künstlicher Systeme, hier besonders ein Prozeß zur Nutzung der Flexibilität deterministisch chaotischer Dynamiken.

Erster Schritt der Arbeit ist die Suche nach Determinismus in der elektrischen Aktivität von Neuronenverbänden in Abgrenzung gegen reines Rauschen. Auf Grund der rekurrenten Kopplung nichtlinearer Elemente (Neuronen) muß dieser Determinismus auch auf höheren Ebenen des Gehirns bestehen. Hieraus folgt Vorhersagbarkeit und Kontrollierbarkeit. Es gibt Hinweise, in diesem Determinismus auch chaotische Regime zu finden. Daraus folgt zumindest Kurzzeitvorhersagbarkeit und Kontrollierbarkeit instabiler Perioden mit wenig Kontrollaufwand. Allerdings täuscht deterministisches Chaos in linearen Analysemethoden (Korrelations-, Fourieranalyse) Rauschen vor. Reines Rauschen besitzt per Definition keine Vorhersagbarkeit über den Mittelwert hinaus oder Kontrollierbarkeit hinein in Signale geringerer Varianz.

Zweiter Schritt ist die Erarbeitung eines weitergehenden theoretischen Konzeptes zur Nutzung der reichen dynamischen Struktur chaotischer Attraktoren für höhere kognitive Fähigkeiten. Die Stabilisierung der unendlich vielen instabilen periodischen Orbits in einem chaotischen Attraktor erlaubt das Schalten zwischen koexistierenden periodischen Attraktoren über einen chaotischen Attraktor als verbindende Transiente. Qualitativ ist solches Verhalten für Experimente zur Reizerkennung (zum Beispiel im olfaktorischen System) vorgeschlagen worden. Zur Illustration wird als Beispiel für diese Prinzipien mit sigmoiden Neuronen die Stabilisierung mehrerer instabiler periodischer Orbits an einem chaotischen Neuromodul und einem Kontrollmodul aus demselben Neuronentyp in konsistenter Weise durchgeführt.

Inhalt

1	Vorwort	7
I	Nichtlineare Zeitreihenanalyse	13
2	Grundlagen der nichtlineare Zeitreihenanalyse	15
2.1	Einführung	15
2.2	Der Einbettungsraum zeitverzögerter Koordinaten	20
2.3	Reduktion auf zeitdiskrete Systeme	23
2.4	Topologische Invarianten, Beispiel Lyapunov-Exponenten	24
3	Praktische Größen für nichtlineare Zeitreihen	33
3.1	Vorhersagemethoden	33
3.2	Recurrence-Plots und fraktale Dimensionen	40
4	Abgrenzung gegen triviale Rauschprozesse, Surrogatmethode	45
4.1	Poisson-Prozesse und lineare Dynamik mit Gaußschem Rauschen	45
4.2	Yule-Walker-Gleichungen	47
4.3	Fourieranalyse, Wiener-Khintchin-Theorem	52
4.4	Phasenrandomisierung zur Erzeugung von ARMA-Surrogaten	57
4.5	Gaußskalierte Surrogate, Spektrenkorrektur	58
II	Nichtlinearitäten in biologischen Neuronenverbänden	65
5	Hippocampus, Intrazelluläre Ableitungen.	67
5.1	Der Hippocampus als Beispielsystem	67
5.1.1	Einfach strukturierter Aufbau	67
5.1.2	Gute experimentelle Zugänglichkeit	69
5.1.3	Funktionale Aspekte	71
5.2	Einführung in das Experiment	72
5.3	Interspike-Intervalle spontaner Aktivität in CA1	73
5.3.1	Hypothesen: Poisson- und Gauß-Prozesse	74
5.4	Burstkorrektur	79
5.4.1	Effekte der Burstkorrektur auf die Verteilung	79
5.4.2	Effekte auf Vorhersagbarkeit	81
5.5	Resultate für die verschiedenen Datensätze	83
5.6	Zusammenfassung und Diskussion	85

6	Periodische Stimulation und epileptische Anfälle	87
6.1	Einleitung	87
6.1.1	Epilepsie und nichtlineare Dynamik	88
6.2	Einführung in das Experiment	89
6.2.1	Experimentelle Präparation	89
6.2.2	Erste Datenauswertung	90
6.3	Dynamische Rekurrenzen während epileptischer Phasen	91
6.4	Epsilonskalierung von Original und Surrogaten	93
6.5	Stroboskopabbildung und Vorhersage	95
6.6	Zusammenfassung und Ausblick	96
6.6.1	Dynamische Kontrolle von Epilepsien	97
6.6.2	Implikationen für die Globaldynamik des Gehirns	97
III	Attraktornetze als weiterführendes Konzept	99
7	Von biologischen spikenden zu artifiziellen sigmoidalen Neuronen	101
7.1	Einführung	101
7.2	Deterministisches integrate-and-fire Neuron	103
7.3	Integrate-and-fire Neuron unter Rauschen	106
7.4	Detailliertere Modelle von Einzelneuronendynamiken	109
8	Attraktorschalten in kontrollierten chaotischen Neuromodulen	113
8.1	Einführung	113
8.2	Selbstkonsistente Neuronale Chaoskontrolle	115
8.2.1	Chaotisches Neuromodul und instabile Perioden	115
8.2.2	Einpunktkontrolle per Neuromodul	116
8.2.3	Kontrolle mehrerer UPOs durch Überlagerung von Einpunktkontrollen	117
8.3	Schalten zwischen periodischen Attraktoren	119
8.3.1	Deterministisches Schalten per externem Eingabeprogramm	119
8.3.2	Spontanes Schalten mittels Rauschen	119
8.4	Diskussion, Implikationen für die Hirn- und Kognitionsforschung	120
IV	Anhänge	123
A	Poisson-Prozesse	125
A.1	Verteilungen	125
A.2	Parameterschätzung	128
B	Explizite Berechnung des AR(1)-Modells	129
B.1	Stationäre Verteilung	131
B.2	Die Verbundwahrscheinlichkeit im stationären Fall	133
B.3	Die Autokorrelation im stationären Fall	135
C	Invariante Dichte und Lyapunov-Exponent der Ulam-Abbildung	137
C.1	Konjugation von Ulam- und Zeltabbildung	139
C.2	Lyapunov-Exponent der Ulam-Abbildung	140

D	Von der Perron-Frobenius- zur Fokker-Planck-Gleichung	143
D.1	Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß	144
D.2	Ein erstes Modell mit multiplikativem Rauschen	147
D.3	Zeitentwicklungsgleichungen für multiplikatives Rauschen	147
D.3.1	Zeitdiskreter Stratonovich-Ansatz	147
D.3.2	Mastergleichung und Fokker-Planck-Gleichung allgemein	149
D.3.3	Fokker-Planck-Gleichung für den Stratonovich-Ansatz	150
D.3.4	Klassische Transformation führt auf $\gamma = 1/2$	152
E	First-Passage-Time-Problem für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß	155
E.1	Lösung des unbeschränkten Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses	155
E.2	Die Integralgleichung für die First-Passage-Time-Verteilung	157
E.3	Ein analytisch einfach lösbarer Spezialfall	159
F	Chaoskontrollalgorithmen	161
F.1	Bestimmung instabiler Perioden	161
F.2	Verschiedene Kontrollalgorithmen	162
F.2.1	OGY-Methode	163
F.2.2	Least-Squares-Methoden	165
F.2.3	Eingangskontrolle im Zweineuronenmodul	165
F.3	Verzögerte Kontrolle	166
F.4	Konsistente Selbstkontrolle	168
F.4.1	Approximation der Kontrollregion	168
F.4.2	Konstruktion der konsistenten Selbstkontrolle	169
F.5	Die Pyragas-Kontrolle für zeitkontinuierliche Systeme	170
F.5.1	Chaotisches zeitkontinuierliches Neuronenmodell	171
F.5.2	Pyragaskontrolle	172

"Nadie te puede quitar lo bailado." (Sten Nadolny)

Kapitel 1

Vorwort

Wo und auf welchen Ebenen kann man in der Hirn- und Kognitionsforschung die neuen Erkenntnisse der letzten 15 Jahre in der nichtlinearen Dynamik fruchtbar anwenden? Aus theoretischen Gründen sollten sinnvolle Anwendungen zu erwarten sein, da Neuronen nichtlineare Bausteine sind und das Gehirn insgesamt hochgradig und oft rekurrent verknüpft ist. Aus der Theorie global gekoppelter nichtlinearer Abbildungen kennen wir ein reiches Spektrum qualitativ verschiedener Dynamiken.

Klassische Computermetaphern allein, so wie auch einfache Feedforwardnetze haben sich als inadäquat zur Beschreibung der Vorgänge im Gehirn während höherer kognitiver Leistungen herausgestellt (siehe Varela, 1988 [103], als exponierteste und konsequenteste Kritik). Neuronale Netze mit koexistierenden Fixpunktattraktoren (auch als Attraktornetze bezeichnet) als assoziative Speicher haben durch ihre Eleganz in der Kombination von Hebb'scher Lernregel und begrenzt biologisch interpretierbarer Dynamik in Basingrenzen als Generalisierungseigenschaft starke Aufmerksamkeit erregt (Hopfield, 1982 [78], 1984 [79]). Aber schon in der in der Arbeit von 1982 beschrieb Hopfield in Simulationen seiner vollständig, also insbesondere auch rekurrent verknüpften Netze andere als nur Fixpunktattraktoren, etwa auch periodische und im Rahmen der zustandsraumdiskreten Dynamik nur unscharf zu fassende "chaotische" Lösungen. Das zeit- und zustandsraumkontinuierliche System in Hopfield, 1984, welches den biologischen Systemen viel näher steht, ist auch theoretisch zu Dynamiken bis zu chaotischen Attraktoren fähig, wenn die biologisch schwer zu rechtfertigende Einschränkung auf symmetrische Verknüpfung zwischen den Neuronen aufgegeben wird. Die in den folgenden 10 Jahren umfangreichen theoretischen Arbeiten zu Hopfieldnetzen beschränken sich ausschließlich auf die Punktattraktoren.

Als eine mögliche Lösung aus dem Problem der unzureichenden Beschreibungen von biologischen Hirnprozessen als Computermetapher, Feedforward- oder Hopfieldnetz wird von Varela, 1987, der Ansatz von Skarda & Freeman, 1988 [101], dargestellt: chaotische Signale als Aufmerksamkeitszustand (*attention*) zwischen periodisch kodierten Signalen bei bestimmten Reizen. Konsequenterweise wurde in der Folgezeit von Varela, Babloyantz und anderen in Hirnsignalen auf verschiedenen Ebenen nach Anzeichen für niedrigdimensionale nichtlineare Dynamik gesucht, während in der Theorie künstlicher neuronaler Netze zum Beispiel von Pasemann [82, 86] und bisher wenigen anderen (z.B. Aihara *et al.*, 1990 [80]) rekurrente Architekturen in ihrer reichhaltigen dynamischen Struktur im Hinblick auf kognitive Fähigkeiten untersucht werden.

Die Arbeit ist nach einem einführenden Teil über nichtlineare Zeitreihenanalyse in

zwei Hauptteile gegliedert:

1. Nichtlinearitäten in biologischen Neuronenverbänden.
2. Attraktornetze als weiterführendes theoretisches Konzept.

Im ersten Teil wird die inzwischen sehr umfangreiche Suche nach nichtlinearer Dynamik in der Neurobiologie beleuchtet. Seit Mitte der 80er Jahre werden EEG-Signale auf niedrigdimensionale chaotische Attraktoren hin untersucht (Babloyantz, Salazar & Nicolis, 1985 [104], Babloyantz & Destexhe, 1986 [41]). Diese Ergebnisse sind durch die rasante Entwicklung in der Zeitreihenanalyse nichtlinearer Dynamik heute so einfach nicht mehr haltbar und vielfach im Detail kritisiert (Theiler, 1995 [42], zu den Analysen von Frank *et al.*, 1990 [43]). Andererseits hat sich die Fragestellung seither fest in der Anwendung der Theorie nichtlinearer Dynamik etabliert.

Ausgehend von den ersten Versuchen, EEG-Signale und Massenzellableitungen (also die Messung der Aktivität mehrerer hundert Neuronen mit einer einzelnen Ableitungselektrode) auf chaotische Dynamik hin zu untersuchen, wurden in der Folgezeit zahlreiche, sehr weitgehende theoretische Konzepte auf der Basis von Eigenschaften nichtlinearer Systeme entworfen. Als einer der Startpunkte gilt der Artikel von Skarda und Freeman (1987) [101], aufgegriffen zum Beispiel von Varela (1988) [103]. Das Durchfahren von Bifurkationssequenzen bei Änderung eines externen Parameters wird dort zur Erklärung von Experimenten am olfaktorischen System von Kaninchen herangezogen.

Treibende Kraft bei der Erstellung der hier vorliegenden Arbeit war das Spannungsfeld zwischen den beiden Bereichen der nichtlinearen Datenanalyse und den theoretischen Konzepten:

Die bisherigen Ergebnisse der Datenanalyse sind noch nicht so befriedigend, wie von der Beschaffenheit des Untersuchungsgegenstandes zu erwarten. Das Gehirn ist ein System bestehend aus vielen nichtlinearen Bausteinen, den Neuronen, die sehr unterschiedlich, aber auch hochgradig rekurrent und in Teilen stark gekoppelt sind. Als Beispiel dieser Verknüpfungsstruktur wird der Hippocampus dienen. Theoretisch ist in solchen Systemen ein reiches dynamisches Verhalten zu erwarten (Kaneko, 1990, 1994, betrachtet global gekoppelte nichtlineare Abbildungen [109, 110]; Wennekers & Pasemann, 1996 [83], untersuchen zufällig verknüpfte Cluster von sigmoidalen Neuronen auf chaotische Dynamik). Dagegen ist auch in neuester Zeit eine schlüssige positive Antwort auf die Frage nach niedrigdimensionalem deterministischem Chaos, egal in welchen (auch pathologischen) Hirnzuständen, schwer aus der Literatur abzuleiten (neben Theiler, 1995 [42], siehe auch Müller-Gerking *et al.*, 1996 [115]). Nur in seltenen Fällen ist aus Abbildungen der Zeitreihen und Attraktoren deterministisches Chaos klar ersichtlich (Hayashi & Ishizuka 1995 [54], Ishizuka & Hayashi 1996 [106]). Jeweils sind diese erfolgreich untersuchten Systeme Einzelneuronen oder eng umgrenzte Präparate.

Deshalb wurden für diese Arbeit Datensätze auf den verschiedenen Beschreibungsebenen in enger Zusammenarbeit mit experimentellen Gruppen, die an nichtlinearer Datenanalyse interessiert sind, näher untersucht: intrazelluläre Ableitungen (Interspike-Intervall (ISI)-Zeitreihen) in Schnitt-Präparaten, intrakraniale Massenableitungen an wachen Versuchstieren unter gleichzeitiger periodischer Anregung und Magnetoenzephalogramm (MEG)-Bilder von pathologischen (hier interictalen, also zwischen epileptischen Anfällen auftretenden) Ereignisse.

Die Ergebnisse sind im Fall der intrakranialen Massenableitungen unter periodischer Anregung eindeutig positiv, während in dem in der Literatur angepriesenen Fall der intrazellulären Ableitungen eher Zweifel angebracht sind. Im dritten Fall ist die Beschaffung geeigneter ungefilterter Daten in der Zeit der Bearbeitung der hier vorliegenden Arbeit nicht weit genug fortgeschritten, um abschließende Aussagen

treffen zu können. Das System selbst läßt aber interessante Ergebnisse erwarten, wie sich aus einem Vergleich der Zeitskalen mit den Effekten des Massenableitungsexperiments zeigt.

So zwiespältig im Moment noch das Bild der Datenanalyse ist, so produktiv ist doch schon das Feld der theoretischen Analyse typischer Eigenschaften nichtlinearer Systeme zur Beschreibung höherer kognitiver Prozesse wie zum Beispiel Untersuchungen zur Koexistenz von Attraktoren und Hystereseeffekten (Pasemann, 1995 [82]), Bifurkationssequenzen hin zu chaotischen Attraktoren (Skarda & Freeman, 1987 [101]) und Chaoskontrolle zur Ereignisklassifizierung und Aufmerksamkeit (Ding & Kelso, 1991 [90], Babloyantz & Lourenço, 1994 [91]).

In der hier vorliegenden Arbeit wird das Konzept der *konsistenten neuronalen Selbstkontrolle* (CNSC) als Möglichkeit zur Konstruktion koexistierender periodischer Attraktoren, die durch einen chaotischen Attraktor miteinander verbunden sind, beschrieben.

Verbindendes Glied zwischen den beiden Teilen der Arbeit ist die 1990 erstmals beschriebene *Chaoskontrolle* (Ott, Grebogi & Yorke) [88]:

- Falls pathologische Hirnzustände chaotisch sind (wie sich im Experiment der Massenableitungen im Hippocampus gezeigt hat), kann per Chaoskontrolle durch signalschwache, aber sehr gezielte Eingriffe in die Dynamik zu anderen erwünschteren Zuständen gelangt werden. Beziehungsweise, wenn der pathologische Zustand Einspringen in periodisches Verhalten sein soll, gegenüber dem gesunden nichtperiodischen Zustand, so kann per Antikontrolle ebenso signalschwach destabilisiert werden (Schiff *et al.*, 1994(b)) [57].
- Die durch eine chaotische Trajektorie verbundenen periodischen Attraktoren in der CNSC sind gerade die chaosstabilisierten instabilen Perioden des chaotischen Attraktors. Hier kontrolliert nicht ein externer Agent (der Arzt oder Neurobiologe) eine chaotische Dynamik, sondern ein Neuromodul kontrolliert ein anderes, beide bestehend aus denselben einfachen Neuronentypen als interne Möglichkeit eines Systems nichtlinearer Untereinheiten, zwischen sehr verschiedenen dynamischen Mustern auf einfache Weise zu wechseln.

Im einzelnen sehen die drei Teile wie folgt aus: Der Teil 1 "Nichtlineare Zeitreihenanalyse" gliedert sich in die Grundkonzepte der Zeitreihenanalyse nichtlinearer Systeme, wie das Einbettungstheorem nach Takens (1981) [19], der Übergang von zeitkontinuierlichen auf zeitdiskrete Systeme (als extrem mächtige Methode zur Datenreduktion ohne Verlust von Information über die wesentlichen topologischen Eigenschaften der Dynamik), die wichtigsten Algorithmen zur Detektion chaotischer Dynamik (Recurrence-Plots, Dimensionsanalysen und Vorhersagemethoden), schließlich statistische Absicherung der Ergebnisse gegen lineare Rauschprozesse (Surrogatmethode).

Es folgen die zwei Teile der Anwendung auf Daten verschiedener Hirnebenen: Die am besten untersuchte Struktur des Gehirns ist wohl der Hippocampus, da sehr einfach strukturiert, in transversalen Schnittpräparaten leicht experimentell zu erforschen und gleichwohl wichtiger Bestandteil des gesamten Informationsverarbeitungsprozesses im Gehirn. Wie aus Lesionsexperimenten bekannt, ist der Hippocampus an der Gedächtnisspeicherung beteiligt.

Kapitel 5 untersucht "Intrazelluläre Ableitungen von Spontanaktivität in CA1-Pyramidenzellen" in unreifen und reifen Geweben von Kaninchen in Schnittpräparaten. Unreife Neuronenverbände zeigen nach einer Vorstudie (Menéndez de la Prida, Bolea & Sánchez-Andrés, 1996) [60] eher unregelmäßiges, sogar epilepsieähnliches Verhalten (aus Vergleichen mit Präparaten unter Bicuculin, einem epilepsieerzeugenden Mittel), reife eher periodisches Verhalten der Interspike-Intervall-Dynamik. Die in einem Versuch an jungem Material gefundene Kurzzeitvorhersagbarkeit, die

in Übereinstimmung mit Beobachtungen von anderen Experimentalgruppen steht (Schiff *et al.* 1994(a)) [57], läßt sich allerdings durch Wegkorrigieren der Bursts beheben. Hieraus läßt sich also über die Bursts hinaus kein nichtlinearer Determinismus in Spontanaktivität nachweisen, wie vielfach behauptet. Allerdings haben sich an Massenableitungen in Slice-Päparaten bei periodischer Stimulierung Phasenraumstrukturen gezeigt, die auf Bifurkationen bis hin zu chaotischen Attraktoren hinweisen (Hayashi & Ishizuka, 1995) [54]. Über einen Zusammenhang mit z.B. Epilepsien läßt sich aus der Hayashi-Ishizuka-Studie der Slice-Präparate nichts schließen.

Hierzu betrachten wir Kapitel 6 zu "Intrakranialen Ableitungen in der CA1-Region des Hippocampus bei periodischer Stimulation der Schaffer-Kollateralen in wachen Ratten". Geeignete periodische Stimulation führt in den Experimenten zu epileptischen motorischen Anfällen der wachen Versuchstiere. Dies stimmt mit der Beobachtung überein, daß einige Formen von Epilepsie schon durch periodische optische oder akustische Signale beim Menschen erregt werden können. Die intrakranialen Ableitungen im Hippocampus zeigen während der Anfälle Anzeichen von deterministischem Chaos, die sich als robust gegenüber Vergleichen mit ihren Surrogaten erweisen. Während der Ruhephasen zwischen den Anfällen sind die Signale im Hippocampus dagegen rein periodisch. Ob sich aus diesen Beobachtungen Rückschlüsse auf Epilepsien beim Menschen ziehen lassen, eventuell sogar auf höheren Ebenen des Gehirns niedrigdimensionale chaotische Signale beobachtbar sind, wird eine in der Zukunft zu klärende Frage sein. Schließlich haben wir MEG-Signalen zur Globaldynamik im Gehirn betrachtet (Analysen dazu sind in dieser Arbeit nicht aufgeführt, da in den bisher vorliegenden kurzen Zeitreihen noch keine klare Abgrenzung gegen lineare Dynamik unter Rauschen möglich war).

Für die vorliegende Arbeit konzentriere ich mich auf die Epilepsie, weil hier die größte Chance besteht, zweifelsfrei den nichtlinearen Charakter der Hirndynamik in Experimenten aufzudecken, als Prüfstein für Experimente und Auswertungsmethoden. Niedrigdimensionale Dynamik ist immer dann zu beobachten, wenn sich das untersuchte System im Zustand starker Kopplung befindet und zudem getrieben wird (siehe etwa Drepper, Engbert & Stollenwerk, 1994 [8], zu einem System der Epidemiologie, das hochvirulente Krankheitserreger in dicht besiedelten Ballungsräumen und zusätzlich periodische saisonale Variation der Kontaktraten als Untersuchungsobjekt hat). Bisher sind den Datenanalysemethoden nur niedrigdimensionale chaotische Systeme zugänglich, während viele Hirnzustände nicht in diese Klasse fallen (Müller-Gerking *et al.*, 1996) [115]. Dabei heißt niedrigdimensionale Dynamik nicht notwendig ein System mit physisch wenigen Freiheitsgraden. In dissipativen Systemen spielen vielmehr die meisten Freiheitsgrade keine wesentliche Rolle in der Dynamik weniger wichtiger Freiheitsgrade. Gerade die stark vernetzten Regionen des Hippocampus gelten als besondere Herde für Temporallappenepilepsien (Kandel, Schwartz & Jessel, 1992) [141].

Der Teil III "Attraktornetze als weiterführendes Konzept" gliedert sich wie folgt: "Von biologischen spikenden zu artifiziellen sigmoidalen Neuronen". Hier wird die Brücke geschlagen zwischen den experimentell zugänglichen ISI-Zeitreihen zu einfachen sigmoidalen Dynamiken der mittleren Feuerrate. Insbesondere wird ein spikendes Neuron untersucht, dessen einfaches Pendant aus Sigmoiden als Baustein in der CNSC dienen wird, wie im weiteren in "Selbstkontrolle in Neuromodulen" erläutert. Das Konzept der *konsistenten neuronalen Selbstkontrolle* (CNSC) als Möglichkeit zur Konstruktion koexistierender periodischer Attraktoren, die durch einen chaotischen Attraktor miteinander verbunden sind, wird im Detail beschrieben. Schalten zwischen diesen Perioden ist auf zweierlei Weise möglich: durch ein von außen vorgegebenes Schaltprogramm und durch spontanes Schalten durch Rauschen. Hiermit wird das reichhaltige dynamische Verhalten deterministisch chaotischer Systeme als höhere Flexibilität gegenüber rein periodischen Systemen

ausgenutzt. Schon in klassischen neuronalen Netzen wird *Generalisierungsfähigkeit* durch das Legen von Attraktorbasins um die Zielmuster, die als Attraktoren gegeben sind, erreicht. Dort müssen die Basinübergänge durch starke Änderung der Anfangsbedingungen der Dynamik vorgenommen werden. In der CNSC dagegen dient der chaotische Attraktor um die periodischen Punkte als leichter Weg zwischen stabilisierten periodischen Attraktoren. Zudem können die stabilisierten Orbits durch Abschalten der Kontrolle wieder leicht verlassen werden, um andere Orbits aufzusuchen.

Auf einige technische Details soll hier noch kurz hingewiesen werden:

(i) Die als Basis der weiteren Datenanalyse hier vorgestellten Recurrence-Plots (zur Untersuchung dynamischer Rekurrenzen) sind 1987 von Eckmann, Kamphorst & Ruelle [24] erstmals als graphische Auswertungsmethode beschrieben worden. Auf den Zusammenhang zwischen mittlerer Länge der Nebendiagonalstreifen mit Lyapunovexponenten wird dort hingewiesen. Der Zusammenhang mit der ϵ -Skalierung, die für den Grassberger-Procaccia-Plot [20] benötigt wird, ist meiner Kenntnis nach, obwohl sehr einfach zu sehen, nirgendwo so dargestellt. Trotz ihrer hohen Datenaufwändigkeit sind die Recurrence-Plots als graphisches Werkzeug sehr geeignet zur Analyse von stark parameterschwankenden Systemen, wie sie in der Biologie üblich sind ("Instationarität" ist in den Lebenswissenschaften geradezu zur Standardausrede für fehlgeschlagene Analyse auf Determinismus geworden). In der Literatur sind die Recurrence-Plots bisher wenig genutzt worden, und wenn doch, dann in oft dafür unfruchtbaren Systemen.

(ii) Die Betrachtung der Verteilungsfunktion von Daten aus der Rangordnung mit anschließendem Kolmogorov-Smirnov-Test ist ebensowenig Standard in der Literatur. Dort werden immer noch die Verteilung selbst per Binning (was bei geringer Datenmenge sehr ungünstig ist!) und anschließenden χ^2 -Test durchgeführt. Letzterer zeigt je nach Klasseneinteilung recht unterschiedliche Ergebnisse. Bei Poisson-Prozessen ebenso beliebt ist direktes Testen auf eine Poissonverteilung nach vorheriger Definition von Zählintervallen (siehe Anhang A). Dies hat dieselben Nachteile wie die Klasseneinteilung (binning) bei Verwendung der Verteilung statt der Verteilungsfunktion.

(iii) Es sind verschiedene Algorithmen für die Kontrolle chaotischer Systeme vorgeschlagen worden. Neben der zuerst benutzten Methode nach Ott, Grebogi & Yorke (1990) [88] (OGY-Methode) ist von Reyl *et al.* (1993) [95] eine Methode zur Stabilisierung von instabilen Perioden P in Lasereperimenten vorgeschlagen worden, die eine Minimierung mit kleinsten Fehlerquadraten für Fixpunkte der P -fachen Poincaré-Abbildung benutzt. Aus meinen früheren Überlegungen zu kleinsten Fehlerquadraten bei der Radialbasis-Approximation (Stollenwerk, 1992) [7] habe ich unabhängig eine linear-least-squares-Methode (LLS) für beliebige Periodenlänge, insbesondere geeignet für Hénon-ähnliche Abbildungen, entwickelt und diese verglichen mit der OGY-Methode und einer nichtlinearen least-squares-Methode (LS). Diese Methode liefert gerade für sigmoidale Neuromodule geeignete Kontrollmöglichkeiten, die in speziellen Fällen der OGY-Methode überlegen sind (Stollenwerk & Pasemann, 1996(a)) [2]. Zwischen den Methoden ist je nach Problemstellung zu wählen. Die mathematische Struktur ist ähnlich in Gl. F.13 und F.18 in Anhang F

$$\mathcal{F}_{u,i+1}^{tr} \cdot \Delta \underline{x}_{n+1} = 0 \quad (1.1)$$

und

$$\underline{h}_i^{tr} \cdot \Delta \underline{x}_{n+1} = 0 \quad , \quad (1.2)$$

wobei beides nur Spezialfälle der in der Kontrolltheorie seit langem bekannten Poleplacement-Technik (siehe Romeiras *et al.*, 1992 [96] für eine Einordnung) sind. Die LLS hat Vorteile im einfachen Fall des benutzten Neuromoduls. Aus dieser einfachen Kontrollmethode heraus war die Entwicklung eines selbststabilisierenden Neuromoduls möglich, das ein Schalten zwischen verschiedenen periodischen Orbits erlaubt (Stollenwerk & Pasemann 1996(b,c,d)) [3, 4, 5]. Die technischen Schwierigkeiten bei der Realisierung von chaotischem Modul und Kontrollmodul in einer Funktionenklasse mit konsistenter Zeitstruktur waren mit der LLS-Kontrolle zu bewältigen. Dazu gehören Approximation der Kontrollfunktion in geeigneter Weise und ein Delay-Problem des Kontrollalgorithmus, jeweils für beliebig lange Periodenlängen.

Für die Kontrolle zeitkontinuierlicher Systeme, wie sie in der medizinischen Anwendung auftreten, hat sich in vielen Fällen die Pyragas-Methode bewährt.

Danksagung:

Mein Dank gilt allen, die zu dieser Arbeit beigetragen haben. Neben den im Text inclusive dem Literaturverzeichnis erwähnten seien besonders genannt: meine Eltern, die mir nicht nur eine Kettensäge schenkten, sondern mich auch unter den dazugehörigen Bäumen formelieren ließen (z.B. Anhang B und die meisten Ergebnisse in Anhang F als Voraussetzung von Kapitel 8), meine Strandnixe aus Hollywoodsluis, die mir neben vielem anderen auch einen Tisch zu mehrjährigen Weihnachtsrechnereien überließ (z.B. viele Ergebnisse in Kapitel 2 und 3), mein Bruder für gemeinsam gesprungene Saltos zur Entspannung von mehr oder weniger intellektueller Anstrengung sowie gemeinsame Zeitungslektüre, meine Hauptideenspender und langjährigen Gesprächspartner Frank Pasemann und Friedhelm Drepper, meine Datenlieferanten besonders aus Alicante und Groningen (im Text jeweils an geeigneter Stelle erwähnt), die lieben Kollegen der Arbeitsgruppe Theoretische Ökologie (ATÖ) und der Arbeitsgruppe Modellierung für Umweltforschung und Lebenswissenschaften (nicht zu verwechseln mit dem Forum Modellierung) des Forschungszentrums Jülich, hier besonders Heinz Vos und Ana Sanchez für ihre ständige Diskussionsbereitschaft, ebenso Michael Eisele für eine katzenbehaarte Couch in San Diego und Helge Siegel u.a. für musikalische Dudelsackbegleitung unserer Saltos bei verschiedenen Veranstaltungen, einige finanziell unterstützende Institutsleiter und Funktionsträger in und um Jülich, Ernst Pöppel, Heinz-Otto Peitgen, Udo Kaupp und Peter Grassberger für ihre Unterschriften an geeigneten Stellen, und schließlich viele weitere Diskussionspartner, hier zuvörderst Marcel van der Heijden, Claudia Mongini und John G. Taylor für ihr besonders gezeigtes inhaltliches Interesse an meinen Arbeiten.

Aachen am Rosenmontag, den 23.2.1998

Teil I

**Nichtlineare
Zeitreihenanalyse**

Kapitel 2

Grundlagen der nichtlineare Zeitreihenanalyse

2.1 Einführung

In diesem Kapitel werden die Grundlagen und Methoden der nichtlinearen Zeitreihenanalyse dargestellt. Die Zeitreihenanalyse befaßt sich mit der Untersuchung von Meßreihen, die aus den zu beschreibenden Systemen, hier aus der Neurobiologie, gewonnen werden. Ziel ist die Charakterisierung der Dynamik des Systems, zunächst klassisch durch Bestimmung der Parameter eines hypothetisch zugrunde gelegten Modells (Parameterfit) und im zweiten Schritt durch statistische Analyse, d.h. Annahme oder Ablehnung des hypothetischen Modells (Nullhypothese) durch Vergleich statistischer Größen der Rohdaten und des als stochastisch anzusetzenden Modells.

Neben der klassischen Zeitreihenanalyse auf der Basis der meist linear angesetzten Dynamik und statistischer Evaluierung dieser Nullhypothese (siehe z.B. Schlittgen & Streitberg, 1995)¹ [148] tritt seit Anfang der 80er Jahre zunehmend die rein qualitative Beschreibung der Dynamik durch die **nichtlineare Zeitreihenanalyse** auf der Basis des Takensschen Einbettungstheorems. So werden Kenngrößen der Dynamik wie die Dimension von Attraktoren im Zustandsraum oder Vorhersagbarkeit, die invariant unter bestimmten Transformationen bleiben (topologische Transformationen), aus den Meßdaten bestimmt. Natürlich sind diese Kenngrößen im zweiten Schritt wieder einer statistischen Analyse zugänglich, obwohl analytisch hierzu viel weniger bekannt ist als in der klassischen linearen Zeitreihenanalyse. In dieser Situation hat sich die Methode der Surrogate als geeignetes Mittel zur statistischen Evaluierung nichtlinearer Dynamik in Abgrenzung gegen lineare Ansätze erwiesen. Gerade auch in der Neurobiologie ist inzwischen diese Abgrenzung gegen lineare Prozesse zur Hauptarbeit geworden (siehe Theiler, 1995² [42], van der Heijden *et al.*, 1996³ [49]). Wir werden die Methode der Surrogate unten im Detail definieren und erläutern.

Die Terme lineare versus nichtlineare Zeitreihenanalyse erklären sich aus der Entwicklung dieser Gebiete:

¹ Schlittgen, R., & Streitberg, B.H.J. (1995) *Zeitreihenanalyse* (Oldenbourg-Verlag, München, 6. Auflage).

² Theiler, J. (1995) "On the evidence for low-dimensional chaos in an epileptic electroencephalogram," *Phys. Rev. E* **51**, 980-994.

³ van der Heijden, M.J., Diks, C., Pijn, J.P.M. & Velis, D.N. (1996) "Time Reversibility of Intracranial Human EEG Recordings in Mesial Temporal Lobe Epilepsy," *Physics Letters A* **216**, 283-288.

Lange bekannt ist die Theorie stochastischer linearer Systeme, insbesondere solcher mit unabhängigem Gaußschem Rauschen. Nach Einsteins Theorie diffusiver Prozesse (übrigens in Anlehnung an die schon ältere Beschreibung spekulativer Märkte als Gaußsche *random walks* durch Bachelier (1900)⁴) erfolgte analytisch der Höhepunkt mit Norbert Wiener in den späten 40er und 50er Jahren dieses Jahrhunderts. Charakteristisch für dieses Denken in linearen Systemen ist in der Physik der Erklärungsversuch von hydrodynamischen Turbulenzen durch das Landau-Bild: Zunehmende Komplexität entsteht durch zahlreicher auftretende unabhängige Freiheitsgrade, technisch beschrieben durch das Auftreten immer neuer Frequenzen im Fourierspektrum, also durch lineare Komponenten.

Die linearen stochastischen Prozesse (oder *autoregressive moving average* AR-MA) hängen über die Yule-Walker-Gleichungen mit der Autokorrelation zusammen (siehe Abschnitt 4.2), diese wiederum über das Wiener-Khintchin-Theorem mit dem Frequenzspektrum der Fourieranalyse, wie im einzelnen unten erläutert werden wird (siehe Abschnitt 4.3). Er wird die Grundlage bilden für die Darstellung der Surrogatmethode. In dieser Methode wird die Äquivalenz zwischen ARMA-Modellen und dem Frequenzspektrum benutzt, um Nullhypothese-Prozesse zu erzeugen, die alle Eigenschaften linearer Prozesse gleich mit den Originaldaten haben, eben das Frequenzspektrum, aber sich in den Eigenschaften der Phasen unterscheiden. Die Daten eines eventuell nichtlinearen Prozesses werden Fourier-zerlegt, das Spektrum und damit die autoregressiven Koeffizienten beibehalten, die Phasen aber randomisiert. Nun wird Fourier-rücktransformiert, was zu einem Surrogatdatensatz des Originals führt. Anschließend werden Maße der nichtlinearen Dynamik, wie Dimension oder Vorhersagbarkeit, auf Original und Surrogat angewandt und deren Abstand bestimmt. Hier verbindet sich die nichtlineare Zeitreihenanalyse mit den Kenntnissen aus der linearen Theorie.

Die Signalanalyse durch Anpassung von linearen stochastischen Modellen, und äquivalent dazu das Betrachten des Frequenzspektrums, hatte ihre Blüte in den 60er und 70er Jahren mit als Meilenstein dem Buches von Box & Jenkins, 1970⁵ [149].

Die Entwicklung der nichtlinearen Zeitreihenanalyse basiert historisch auf der Entdeckung seltsamer chaotischer Attraktoren in nichtlinearen dissipativen Systemen durch Ruelle & Takens 1971⁶ [14]. Die Begriffe des nichtlinearen dissipativen Systems so wie chaotischer und seltsamer Attraktoren werden im technischen Teil genauer erklärt werden. Hier soll ein intuitives Verständnis genügen: Dissipative Systeme sind in der Physik solche mit Reibung im Gegensatz zu konservativen oder Hamiltonschen Systemen, die in der theoretischen Physik in weiten Bereichen vorherrschen. Einfache Erhaltungsgrößen wie die Energie gibt es in solchen dissipativen Systemen nicht. In allgemeinen dissipativen Systemen ziehen sich Zustandsraumgebiete zusammen, so daß Ensembles von Anfangsbedingungen mit ihren Trajektorien sich in Attraktoren sammeln. Die Zeitentwicklung auf den Attraktoren enthält dann keine Information mehr über die Anfangsbedingungen der Trajektorie. Lineare Systeme können im Zeitlimit gegen unendlich nur im ganzen kontrahieren oder expandieren. Wenn nämlich alle kontrahierenden Richtungen sich zusammengezogen haben, entscheidet sich das weitere Schicksal durch Nichtexistenz expansiver Richtungen zu Fixpunktattraktoren oder bei Existenz von expansiven Richtungen durch Divergenz. Nichtlineare Systeme dagegen können instabile Fixpunkte haben, also lokal expansive Richtungen, aber im ganzen trotzdem dissipativ

⁴Bachelier, L. (1900) La theorie de la speculation, Paris. Nachdruck in: Cootner, P.H. (1964) *The Random Character of Stock Market Prices* (MIT Press, Cambridge, Massachusetts).

⁵Box & Jenkins (1970) *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, San Francisco.

⁶Ruelle, D., & Takens, F. (1971) On the Nature of Turbulence, *Commun. Math. Phys.* 20, 167–192. Siehe auch *Commun. Math. Phys.* 23 (1971), 343–344.

sein, also beschränkte Zustandsraumbereiche nie verlassen (Dieses Verhalten nennt man auch *stretching and folding*). Hierdurch sind neben den periodischen Attraktoren auch chaotische möglich, also solche Attraktoren, auf denen Trajektorien Sensitivität gegen kleine Abweichungen zeigen. Oft sind dies sogar zusätzlich Fraktale, so daß man von seltsamen Attraktoren spricht⁷. Fraktale Punktmen-gen sind durch nichtganzzahlige Dimensionen definiert. Hier ist Dimension im einfachsten Fall durch den *box-counting*-Algorithmus zu verstehen: Bei Verkleinerung von ε -Kästchen wächst die Anzahl der zur Überdeckung der Punktmenge nötigen Kästchen N mit einer Potenz D , d.h. $N \sim \varepsilon^D$. Bei einer durch Punkte gleichmäßig überdeckten Fläche ergibt sich $D = 2$, bei einem Würfel $D = 3$, etc.. Man zählt die Anzahl der ε -Kästchen, betreibt also *box-counting*. Die Trajektorien seltsamer Attraktoren bilden nun eben Mengen mit nichtganzzahligen Skalierungen D .

Obwohl immer wieder spätestens seit der Untersuchung des 3-Körperproblems durch Poincaré Anzeichen für qualitativ anderes Verhalten in nichtlinearen Systemen (dort in konservativen Systemen, was die Angelegenheit nicht erleichtert) gegenüber linearen zu erkennen waren, z.B. schon Ulams Abbildung mit einer stationären kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung in einem rein deterministischen System 1947⁸, oder die Beobachtungen zur Sensitivität von den Anfangsbedingungen in niedrigdimensionalen Differentialgleichungssystemen⁹ aus der Analyse partieller Differentialgleichungen des Rayleigh-Bénard-Systems der Hydrodynamik durch Eduard Lorenz 1963, ist der Durchbruch eindeutig auf Anfang der 70er Jahre zu datieren. Für einen kurzen historischen Überblick und Einordnung siehe Ian Stewarts Buch (1989)¹⁰ [128] oder David Ruelle (1991)¹¹ [127]. Die wichtigste Originalliteratur der Anfänge findet sich bei Pedrac Cvitanović (1989)¹² [123] als *reprints*, während neuere Originalbeiträge in Ott, Sauer & Yorke (1994)¹³ [124] nachgedruckt sind.

Ruelle und Takens zeigten 1971, daß im Gegensatz zum Landau-Bild der Turbulenzen nicht unendlich viele Freiheitsgrade eines deterministischen Systems nötig sind, um ein kontinuierliches breitbandiges Frequenzspektrum zu erzeugen, was bis dahin als eindeutiges Zeichen verrauschter Systeme galt. Vielmehr reichen in einer zeitkontinuierlichen Dynamik 3 Freiheitsgrade. Nach dem Poincaré-Bendixson-Theorem reichen 2 Dimensionen nicht aus, da sich in 2 Dimensionen nur Punktattraktoren oder geschlossenen Kurven, also Grenzzyklen, d.h. periodische Attraktoren, ergeben (siehe Guckenheimer & Holmes, 1983¹⁴ [131], S. 44, zu weiteren Erläuterungen oder auch Hofbauer & Sigmund, 1984¹⁵ [152], S.89 f.). Konsequenterweise entwickelte Ruelle die stochastische Beschreibung deterministischer Systeme weiter.

Für etwa 10 Jahre bestand dann zwar die theoretische Kenntnis chaotischer

⁷Der Sprachgebrauch für "seltsame Attraktoren" ist in der Literatur uneinheitlich: Manchmal wird "chaotisch" plus "fraktal" als "seltsam" bezeichnet, manchmal "fraktal" und "Attraktor" als seltsamer Attraktor, z.B. in Ott (1993) [125] wird von *strange nonchaotic attractors* gesprochen, um fraktale und hier quasistationäre Attraktoren zu bezeichnen.

⁸Ulam, S.M. & von Neumann, J. (1947) [99] On combination of stochastic and deterministic processes, *Bull. Am. Math. Soc.* **53**, 1120.

⁹"Sensitivität von den Anfangsbedingungen" ist schon von Hadamard bei der Untersuchung von geodätischen Flüssen auf negativ gekrümmten Flächen beobachtet und benannt worden (private Mitteilung, D. Mayer, Clausthal).

¹⁰Stewart, I. (1989) *Does God Play Dice?* (Penguin books, London).

¹¹Ruelle, D. (1991) *Chance and Chaos* (Princeton University Press, New Jersey; deutsch: *Zufall und Chaos*, Springer, Berlin, 1992).

¹²Cvitanović, P. (1989) *Universality in Chaos* (Adam Hilger, Bristol and New York, 2nd edition).

¹³Ott, E., Sauer, T. & Yorke, J.A. (1994) *Coping with Chaos* (John Wiley & Sons, New York).

¹⁴Guckenheimer, J., & Holmes, P. (1983) *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer, New York).

¹⁵Hofbauer, J., & Sigmund, K. (1984) *Evolutionstheorie und Dynamische Systeme: Mathematische Theorie der Selektion*. (Verlag Paul Paray, Berlin, Hamburg).

Attraktoren, aber kein direkter Zugang aus der Messung hydrodynamischer und anderer Experimente. Diese Lücke wurde von Packard *et al.*, 1980¹⁶ [18], wohl auf eine Anregung von David Ruelle hin, und Takens, 1981¹⁷ [19], mit der Einbettungstechnik geschlossen und bildet seitdem den **endgültigen Startpunkt der nichtlinearen Zeitreihenanalyse**. Während Packard *et al.* die physikalische Intuition gaben, lieferte Takens die theoretische Fundierung, indem er das aus den 40er Jahren stammende Whitney'sche Einbettungstheorem¹⁸ für stetige Mannigfaltigkeiten auf gebrochen-dimensionale, also fraktale, Mannigfaltigkeiten übertrug. Die Grundidee der im folgenden Takens-Einbettung genannten Technik besteht darin, aus einer einzelnen Zeitreihe des Systems durch Konstruktion eines Hilfszustandsraumes mit zeitverzögerten Koordinaten Kenntnisse über das gesamte System bzw. seinen chaotischen Attraktor zu gewinnen. Die zu gewinnenden Kenntnisse sind die topologischen Invarianten, z.B. Attraktordimension oder Sensitivität von den Anfangsbedingungen, was gleichbedeutend mit Kurzzeitvorhersagbarkeit und Langzeitunvorhersagbarkeit ist. Erst diese Charakteristika nichtlinearer Systeme werden schließlich gegen die Nullhypothese der linearen verrauschten Systeme per Surrogatmethode getestet.

Praktisch handhabbare Maße wurden in der Folge auf der Basis der Einbettung entwickelt und werden es bis heute. Die Sensitivität von den Anfangsbedingungen, die mathematisch auf positiven Lyapunov-Exponenten basiert, wurde zunächst mit dem Versuch der direkten Abschätzung des größten Lyapunov-Exponenten durch den Wolf-Algorithmus 1984 untersucht (Wolf *et al.*, 1984)¹⁹ [21]. Inzwischen haben sich Tests der Vorhersagbarkeit durchgesetzt, z.B. Farmer & Sidorowich, 1987²⁰ [25], Casdagli, 1989 [27], Sugihara & May, 1990 [29], und in noch stärker vereinfachter Form in Schiff, Sauer & Chang, 1994²¹ [35]. Neben der Chaotizität ist die Seltsamkeit der Attraktoren ein weiteres Kriterium: Der in der Praxis irrelevanten Hausdorff-Dimension des Attraktors wurde die Korrelationsdimension von Grassberger und Procaccia 1983²² [20] entgegengestellt als eine einfach implementierbare Meßmethode neben Varianten wie der Boxcounting-Dimension, beides Spezialfälle der Renyi-verallgemeinerten-Dimensionen (siehe Ott, Sauer & Yorke, 1994 [124]).

¹⁶Packard, N.H., Crutchfield, J.P., Farmer, J.D. & Shaw, R.S. (1980) "Geometry from a Time Series" *Phys. Rev. Lett.* **45**, 712–716.

¹⁷Takens, F. (1981) "Detecting strange attractors in turbulence," in: *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980* eds. D. Rand, L.S. Young *Lecture Notes in Mathematics* **898** (Springer, Berlin) 366 ff.

¹⁸Whitney, H. (1936) Differentiable manifolds, *Ann. Math.* **37**, 645.

¹⁹Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L. & Vastano, J.A. [1985] "Determining Lyapunov exponents from a time series," *Physica D* **16**, 285–317.

²⁰Farmer, J.D. & Sidorowich, J.J. (1987). Predicting chaotic time series. *Phys. Rev. Lett.* **95**, 845–848.

²¹Schiff, S.J., Sauer, T., & Chang, T. (1994) Discriminating Deterministic versus Stochastic Dynamics in Neuronal Activity, *Integrative Physiological and Behavioral Science* **29**, 246–261. Darin wird der Vorhersagealgorithmus beschrieben.

²²Grassberger, P. & Procaccia, I. [1983] "On the characterization of strange attractors," *Phys. Rev. Lett.* **50**, 346–349.

Nach dieser kurzen Übersicht und historischen Einordnung der Grundlagen und Methoden der nichtlinearen Zeitreihenanalyse werden in den nun folgenden technischen Teilen die einzelnen Aspekte im Hinblick auf die weitere Anwendung im neurobiologischen Datenteil angesprochen. Zu den mathematischen Grundlagen der Theorie dynamischer Systeme gibt es heute sehr gute Lehrbücher und Einführungen (siehe Literaturverzeichnis), auf die in allen hier nicht direkt relevanten Fragen der nichtlinearen Dynamik leicht zurückgegriffen werden kann.

Die einzelnen hier angesprochenen Punkte sind:

- Einbettung als Grundtechnik der Datenanalyse auf topologische Strukturen. (Beispiel: Rössler-Attraktor, nach Packard *et al.* 1980 [18].)
- Datenreduktion von zeitkontinuierlichen auf zeitdiskrete Systeme: Poincaré-Schnitt, stroboskopische Abbildung, Interspike-Intervall(ISI)-*return map*.
- Konjugationen zwischen dynamischen Systemen und topologische Invarianten am Beispiel der Lyapunov-Exponenten. (Beispiel: Aktivitätendynamik und Ausgabedynamik eines Zwei-Neuronen-Systems.)
- Fraktale Dimensionen und *recurrence plots*. (Literaturbeispiel: Hénon-Attraktor.)
- Vorhersagemethoden. Darstellung verschiedener Algorithmen.
- Abgrenzung gegen triviale Rausch-Prozesse: *AutoRegressive Moving Average* (ARMA)-Modelle mit Gaußischem Rauschen, Poisson-Prozesse. Surrogatmethode.

Der letzte Punkt **Abgrenzung gegen triviale Rauschprozesse** benötigt Grundkenntnisse der Theorie stochastischer Prozesse, so im Falle der Untersuchung von Interspike-Intervallen (ISI) den Poisson-Prozeß als eine erste Nullhypothese. Generell werden lineare Gaußsche Prozesse den roten Faden bilden.

Beginnen wir nun mit der Theorie der Einbettung, die die Methode der Zustandsraumrekonstruktion mittels verzögerter Koordinaten liefern wird. Diese bildet den ersten Schritt einer jeden nichtlinearen Zeitreihenanalyse.

2.2 Der Einbettungsraum zeitverzögerter Koordinaten

Die Einbettung ist die Grundtechnik der Datenanalyse auf topologische Strukturen von dynamischen Systemen und ihren Attraktoren. Zur Einführung der Einbettungstechnik nach Takens betrachten wir als Beispiel für ein dissipatives System

$$\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, \underline{p}) \quad (2.1)$$

mit Zustandsvariablen $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, Parametern $\underline{p} \in \mathbb{R}^m$ und Dynamik $\underline{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, das Rösslersystem $\underline{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(y + z) \\ \dot{y} &= x + a \cdot y \\ \dot{z} &= b + x \cdot z - c \cdot z \end{aligned} \quad (2.2)$$

Der Parametervektor ist $\underline{p} = (a, b, c)$. Wir folgen hierin der Originalargumentation von Packard *et al.* (1980) [18]. Für die Parameterwerte $a = 0.2$, $b = 0.4$ und $c = 5.7$ ergibt sich im Zustandsraum der Koordinaten $(x(t), y(t), z(t))$ aus beliebigen Startwerten $(x_0(t), y_0(t), z_0(t))$ ein seltsamer chaotischer Attraktor, genannt Rösslerattraktor nach Otto Rössler (1976)²³ [100].

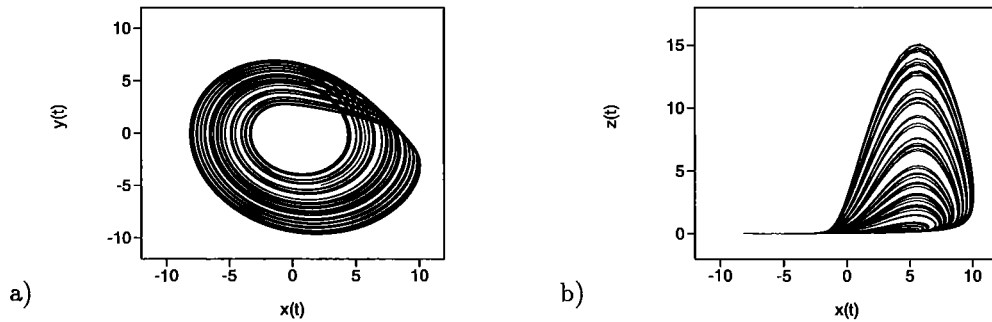


Abbildung 2.1: Zwei Projektionen des Rössler-Attraktors für die Parameter $a = 0.2$, $b = 0.4$ und $c = 5.7$.

Das Rösslersystem läßt sich auf Variable y, \dot{y}, \ddot{y} transformieren und lautet dann

$$\ddot{y} = G(y, \dot{y}, \ddot{y}) \quad (2.3)$$

In Falle des Rösslersystems läßt sich die Dynamik leicht in Ableitungen einer einzigen Meßzeitreihe ausdrücken als

$$\begin{aligned} \ddot{y} = & y \cdot (-c - ay + (1 + a^2)\dot{y} - a\ddot{y}) \\ & + \dot{y}(ac - 1 - a\dot{y} + \ddot{y}) + \ddot{y}(a - c) - b \end{aligned} \quad (2.4)$$

Als vollständig in Variablen y, \dot{y}, \ddot{y} ausgeschriebenes System ergibt sich mit $u := y$, $v := \dot{y}$ und $w := \ddot{y}$:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= w \\ \dot{w} &= u(-c - au + (1 + a^2)v - aw) \\ & + v(ac - 1 - av + w) + w(a - c) - b \end{aligned} \quad (2.5)$$

²³Rössler, O.E. (1976) An Equation for Continuous Chaos, *Phys. Lett. A* **57**, 397–398.

Also ist die Dynamik des Systems $(x(t), y(t), z(t))$ auch durch $y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t)$ darstellbar, bzw. bei Näherung der Zeitableitung durch den Differenzenkoeffizienten $\dot{y}(t) \approx \frac{1}{\tau}(y(t + \tau) - y(t))$ durch den Raum der Verzögerungskordinaten

$$y(t), y(t + \tau), y(t + 2\tau) \quad .$$

Dabei sind nun endlich lange Verzögerungszeiten τ erlaubt, sowie monotone Meßfunktionen $h(t) = h(x(t), y(t), z(t))$ als Kombination der Zustandsvariablen statt nur der Projektion auf eine der Variablen selbst.

Beim Übergang von der Originalzustandsraumbeschreibung $(x(t), y(t), z(t))$ zum Einbettungsraum $h(t), h(t + \tau), h(t + 2\tau), \dots, h(t + (E - 1)\tau)$ mit der Einbettungsdimension E geht natürlich durch die Wahl endlicher Verzögerungszeiten und die Einschränkung auf eine Variable bzw. allgemeine Meßfunktionen einige Information über das zugrundeliegende System verloren.

Was an Information über das System bleibt, sagt das **Einbettungstheorem von Takens** (1981) [19]:

Das d -dimensionale dynamische System $\dot{x} = F(x, p)$ erzeuge einen Attraktor der Boxcounting-Dimension $D < d$. Auf dem Attraktor werde die Meßzeitreihe $h(t) = h(\underline{x}(t))$ gemessen und im Verzögerungsraum $h(t), h(t + \tau), \dots, h(t + (E - 1)\tau)$ mit Verzögerungszeit τ und Dimension E betrachtet.

Dann ist die Topologie des Attraktors im Verzögerungsraum mit Dimension $E \geq 2D + 1$ dieselbe wie im Zustandsraum des Systems $\underline{x}(t)$ selbst für theoretisch alle τ bei unendlich langer und genauer Messung, also eine **Einbettung**. Insbesondere haben topologisch invariante Größen wie z.B. Lyapunov-Exponenten (zur Definition siehe unten) und Dimensionen (auch fraktale) dieselben Zahlenwerte im Originalzustandsraum wie im Verzögerungsraum.

Die zusätzlichen Dimensionen $E \geq 2D + 1$ werden benötigt, um in Projektionen durch endliche τ und Meßfunktion h auftretende Unstetigkeiten zu entfalten.

In neuerer Zeit konnte die theoretische Schranke von $E \geq 2D + 1$ auf $E \geq 2D$ verschoben werden (Sauer, Yorke & Casdagli, 1991, "Embedology"²⁴ [31]), während bei der Wahl geeigneter Verzögerungszeiten τ und nicht zu pathologischen Meßfunktionen h in der Praxis $E \approx d$ ausreicht (Packard *et al.*, 1980) [18].

Das Takenssche Einbettungstheorem ist für die Praxis der Zeitreihenanalyse, insbesondere auch in der Neurobiologie, von so zentraler Bedeutung, weil man von fast keinem Experiment, außer vielleicht in der klassischen Mechanik, alle Freiheitsgrade d eines Systems in ihrer Zeitentwicklung bestimmen kann. Zumeist ist nur eine einzelne oder sind nur wenige Meßreihen aus einem größeren System zugänglich.

In hochdimensionalen dissipativen Systemen (d.h. d sehr groß) hilft es zudem oft, daß sich die Dynamik schnell auf geometrische Gebilde mit viel niedrigeren

²⁴Sauer, T., Yorke, J.A., & Casdagli, M. (1991) Embedology, *J. Stat. Phys.* 65, 579–616.

Dimensionen D zubewegt und sich dann auf diesen wenigen Dimensionen langsam weiterentwickelt. Mathematisch ist dies durch das Theorem der Zentrumsmanigfaltigkeit abgesichert, in der Physik als Separierbarkeit verschiedener Zeitskalen oder als Versklavungsprinzip (Haken, 1980)²⁵ [151] bekannt. Die Einbettung braucht dann nur noch in $E \approx 2D$ Dimensionen vorgenommen zu werden und nicht in der viel größeren Zahl von d Dimensionen, um qualitative Aussagen über die Dynamik zu erhalten. Qualitative Aussagen sind z.B., ob ein Fixpunktattraktor, ein periodischer Attraktor oder ein chaotischer Attraktor welcher Dimension bzw. welcher Sensitivität gegen kleine Störungen oder Vorhersagbarkeit vorliegt.

In der Praxis können sehr komplizierte Meßfunktionen schon durch die physikalischen Bedingungen des Problems gegeben sein. Beim Magnetoenzephalogramm folgt aus einer Stromverteilung $\underline{j}(\underline{y})$ am Ort \underline{y} für den Meßort \underline{x} das Magnetfeld $\underline{B}(\underline{x})$ nach dem Biot-Savartschen Gesetz mit

$$\underline{B}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d^3y \underline{j}(\underline{y}) \times \frac{\underline{x} - \underline{y}}{|\underline{x} - \underline{y}|^3} \quad (2.6)$$

Hier wird ein angenommener Dipol an fester Position mit variabler Dipolstärke einen linearen Meßprozeß hervorrufen (siehe Abb. 2.2, a)), während ein Dipol fester Stärke aber zeitlich variabler Position zu einer hochgradig positionsabhängig verzerrten Meßfunktion führt (siehe Abb. 2.2, b)). Die Einbettungsergebnisse dieser beiden Fälle jeweils mit der Rösslerdynamik sind in Abbildung 2.2 gezeigt. Die Verzögerungszeit ist jeweils $\tau = 2.5$ in Einheiten der Systemzeit des Rössler-Attraktors. Als Faustregel gilt ca. $1/4$ einer dominanten Periodendauer.²⁶

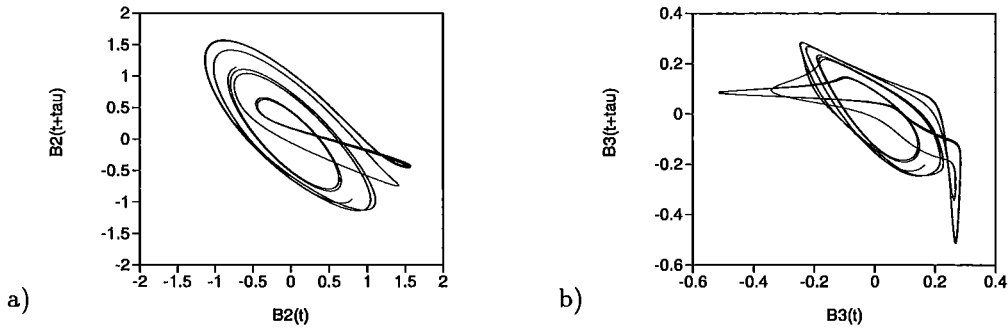


Abbildung 2.2: a) Einbettung des Magnetfeldes aus der vorwärtsgerechneten zeitlich variierenden Stärke eines Dipols auf fester Position. In b) variiert die Dipolposition zeitlich bei fester Stärke des Dipols. Deutlich sind die Auswirkungen der Nichtlinearität in der Meßfunktion zu sehen. Die zeitliche Entwicklung der Signale ist jeweils dem Rössler-Attraktor mit den Parametern $a = 0.2$, $b = 0.4$ und $c = 5.7$ entnommen.

Zusammengefaßt haben wir im ersten Schritt der Zeitreihenanalyse also ein hochdimensionales dynamisches System auf die niedrigendimensionale²⁷ bzw. sogar eindimensionale Meßzeitreihe im Verzögerungsraum reduziert. Im nun folgenden Schritt werden wir die immer noch sehr hohe Datenflut der zeitkontinuierlichen Dynamik auf zeitdiskrete Abbildungen reduzieren. Wie schon am Beispiel des Rössler-Attraktors deutlich wird, ist die Unvorhersagbarkeit und Fraktalität des Attraktors nicht in einem Umlauf zu erkennen, sondern in der scheinbaren Unregelmäßigkeit vieler Umläufe, also auf längeren Zeitskalen als der typischen Umlaufzeit.

²⁵Haken, H. (1980) *Einführung in die Synergetik*, Springer-Verlag, Berlin.

²⁶Diese Rechnungen sind in Zusammenarbeit mit dem Institut für Medizin (IME) des Forschungszentrums Jülich mit einem MEG-Vorwärtsrechnungsprogramm entstanden.

²⁷Bei Messungen $h_1(t), h_2(t), \dots$ nimmt man den Verzögerungsraum $h_1(t), h_2(t), \dots, h_1(t + \tau), h_2(t + \tau), \dots$

2.3 Reduktion auf zeitdiskrete Systeme

Eine extreme Datenreduktion kann durch den Übergang von zeitkontinuierlichen auf zeitdiskrete Systeme bei Beibehaltung der wesentlichen topologischen Eigenschaften erzielt werden. Dieser Übergang erfolgt durch Poincaré-Schnitte, stroboskopische Abbildung (siehe Guckeheimer & Holmes 1983 [131]), oder in der Neurobiologie auch durch Interspike-Intervall Abbildungen, genannt *ISI-return maps*.

Legt man durch den Attraktor des Rösslersystems (siehe Abb. 2.1, a)) eine Ebene transversal zu den Trajektorien, z.B. mit $y = 0$ für negative x -Werte, so schneiden die Trajektorien diese Ebene nahezu senkrecht, auf jeden Fall aber unter nicht-verschwindendem Winkel, also nicht tangential. Nehmen wir nun die zeitlich aufeinander folgenden Durchstoßpunkte $\underline{x}_n = (x_n, y_n)$ für den n -ten Durchstoß, so erhalten wir eine zeitdiskrete Dynamik

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{f}(\underline{x}_n) \quad (2.7)$$

Hierbei sind x_n und y_n die Koordinaten auf der zwei-dimensionalen Ebene und stehen in keiner direkten Beziehung zu den Koordinaten $x(t), y(t), z(t)$ des ursprünglichen Zustandsraumes der zeitkontinuierlichen Dynamik. Die Ebene der Durchstoßpunkte nennt man **Poincaré-Ebene**. Natürlich können wir viele dieser Ebenen durch den Attraktor legen. Einzige Bedingung soll sein, daß die Trajektorien alle die Poincaré-Ebene in einer Richtung tatsächlich durchstoßen, also zur Zeit t auf der einen Seite, zur Zeit $(t + \Delta t)$ auf der anderen Seite liegen, und nicht nur tangieren.

Die wesentliche Aussage ist nun, daß die Topologie des zeitdiskreten Systems qualitativ die Topologie des zeitkontinuierlichen Systems widerspiegelt: Ein Grenzzyklus wird zum einem anziehenden Fixpunkt, ein doppelter Grenzzyklus zur stabiler Periode zwei, ein vierfacher zur stabiler Periode vier, eine Trajektorie auf einem Torus wird zu einem invarianten Kreis etc..

Dies hat zur Konsequenz, daß topologische Invarianten zwischen zeitkontinuierlichem System und zeitdiskretem System in Beziehung stehen: Dimensionen reduzieren sich um eins, nämlich der trivialen Dimension entlang der Trajektorie. Unvorhersagbarkeit bleibt erhalten bis auf die triviale Zeitkonstante zwischen zwei aufeinanderfolgenden Durchstößen der Poincaré-Ebene (Ruelle, 1989²⁸ [126], S. 51–52).

Die Reduktion auf zeitdiskrete Abbildungen kann nicht nur durch das Legen von Poincaré-Ebenen erfolgen. So kann die Einschränkung auf eine Ebene gelockert werden zu einer gekrümmten Durchstoßfläche. Die stroboskopische Abbildung läßt sich im Zustandsraum als Durchstoßfläche betrachten. In einer stroboskopischen Abbildung wird zwischen zwei Datenaufnahmen n und $n + 1$ jeweils eine feste Wiederkehrzeit T angenommen. In Systemen wie dem Rössler-Attraktor mit einer dominanten Umlaufzeit bietet sich dieser Übergang von zeitkontinuierlicher zu zeitdiskreter Dynamik an.

Eine dritte Möglichkeit des Überganges besteht darin, sich Aufintegrationszeiten anzusehen. Für die Neurobiologie ist diese Art besonders interessant, da Interspike-Intervalle (ISI), wie sie in spikenden Neuronen auftreten, als solche Aufintegrationszeiten deterministischer Dynamik interpretiert werden können (Sauer, 1994) [36]. Hierin sei $S(t)$, aufgefaßt als $S(x(t))$, eine Funktion der Variablen des dynamischen Systems $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}, p)$ mit Attraktor A , z.B. die x -Komponente des Rösslersystems²⁹.

²⁸Ruelle, D. (1989) *Chaotic Evolution and Strange Attractors* (Cambridge University Press, Cambridge).

²⁹Vergleiche Sauer (1994), *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3811–3814, mit $a = 0.36, b = 0.4, c = 4.5$ und $S(t) = x(t) + 40$.

Seien T_0 Startzeit und θ die Schwelle des Neuronenfeuerns. Dann sind die Interspike-Intervalle

$$t_i := T_{i+1} - T_i$$

gegeben durch die Feuerzeiten T_{i+1} als Funktion von T_i mit

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} S(t) dt = \theta \quad . \quad (2.8)$$

Nach jedem Überschreiten der Schwelle θ wird das Integral auf Null gesetzt und die Integration solange fortgesetzt, bis die Schwelle wieder erreicht ist.

Tim Sauer zeigte, daß aus den ISI $\{t_i\}$ der x -Zeitreihe des Rössler-Attraktors wieder der chaotische Attraktor A des Rösslersystems rekonstruiert werden kann. Zum Beispiel liefert die Boxcountingdimension den richtigen Wert. Die beobachtete Kurzzeitvorhersagbarkeit hängt natürlich von der Schwelle ab, die so etwas wie die mittlere Wiederkehrzeit im Falle der Poincaré-Ebene widerspiegelt.

Nachdem nun allgemeine zeitkontinuierliche Systeme auf viel weniger datenintensive zeitdiskrete Systeme zurückgeführt sind, indem die triviale Zeitentwicklung entlang der Trajektorienrichtung herausgenommen wurde, werden wir im folgenden rein zeitdiskrete Abbildungen betrachten. Daran zeigen sich in einfacher Weise die Begriffe der Dimensionen und Vorhersagbarkeiten und ihre Bedeutung als topologische Invariante, die bisher nur lose eingeführt sind. Sie lassen sich leicht auf den zeitkontinuierlichen Fall verallgemeinern (siehe Ruelle, 1989 [126], S. 52 ff., Guckenheimer & Holmes, 1983 [131], Ott, 1993³⁰ [125], etc.).

2.4 Topologische Invarianten, Beispiel Lyapunov-Exponenten

Der Begriff der Konjugationen zwischen dynamischen Systemen und seine Implikationen für die topologischen Invarianten wird nun mit dem Beispiel der Lyapunov-Exponenten erläutert. Bisher haben wir gesehen, wie man zeitkontinuierliche Systeme (Flüsse) auf zeitdiskrete (Abbildungen genannt) reduzieren kann, indem man die Dimension des Zustandsraumes entlang der Trajektorie um eins erniedrigt.

Die im weiteren speziell interessierenden chaotischen Attraktoren existieren nur in mindestens 3-dimensionalen Flüssen, also solchen mit 2-dimensionalen invertierbaren Abbildungen. Diese mindestens zweidimensionalen Abbildungen \underline{f} mit Dynamik

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{f}(\underline{x}_n)$$

sollen im weiteren Diffeomorphismen sein, d.h. invertierbar und differenzierbar (aus der Klasse der Funktionen C^k mit $k \geq 1$). Zu dieser Klasse gehört die einfachste nichtlineare zweidimensionale Dynamik des Hénon-Systems (e.g. Ott, 1993 [125])

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} &= bx_n \quad , \end{aligned} \quad (2.9)$$

wie auch ihre Umkehrabbildung. Diese Abbildung $\underline{x}_{n+1} = \underline{f}(\underline{x}_n)$ wie ihre Umkehrabbildung $\underline{x}_{n-1} = \underline{f}^{-1}(\underline{x}_n)$, gegeben durch

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= \frac{1}{b} y_n \\ y_{n-1} &= \frac{a}{b^2} y_n^2 + x_n - 1 \quad , \end{aligned} \quad (2.10)$$

³⁰Ott, E. (1993) *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge).

sind differenzierbar für $b \neq 0$. Für $b = 0$ erhalten wir die nichtinvertierbare eindimensionale Abbildung $x_{n+1} = 1 - ax_n^2$, die durch lineare Transformation in die von R.M. May (1976)³¹ [16] untersuchte logistische Abbildung oder auch Feigenbaumabbildung

$$x_{n+1} = r \cdot x_n(1 - x_n) \quad (2.11)$$

überführt werden kann. Das Hénon-System ist von Michel Hénon (1976) [15] gerade als invertierbare Erweiterung der nichtinvertierbaren Abbildung $x_{n+1} = 1 - ax_n^2$ konstruiert worden³². Im Hénon-System ergibt sich der häufig betrachtete Attraktor für die Parameter $a = 1,4$ und $b = 0,3$.

Der einfachste Fall in der Neurodynamik, d.h. bei Abbildungen mit Sigmoidenfunktionen

$$\sigma(x) := \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (2.12)$$

für $x \in \mathbb{R}$, die auch als Standardsigmoide bezeichnet wird, wird uns im weiteren häufig begegnen. Eine allgemeine Sigmoide ist eine S-förmige Funktion, d.h. eine nach unten und oben beschränkte monoton steigende Funktion. Z.B. zählt zu den allgemeinen Sigmoiden die tanh-Funktion. Die Standardsigmoide ist durch $\sigma(-\infty) = 0$ und $\sigma(+\infty) = 1$ beschränkt und streng monoton steigend $\sigma'(x) = \sigma(x) \cdot (1 - \sigma(x)) > 0$. Wir werden im Weiteren unter der Sigmoidenfunktion immer die Standardsigmoide $\sigma(x)$ aus Gleichung 2.12 verstehen, da sie als vereinfachtes Modell einer mittleren Feuerrate aufgefaßt werden kann (siehe Kapitel 7 zu spikenden Neuronen und darin definierten mittleren Feuerraten).

Anders als der quadratische Term in der Hénon-Abbildung ist die Sigmoide selbst invertierbar mit

$$\sigma^{-1}(y) = -\ln\left(\frac{1}{y} - 1\right)$$

für $y \in (0, 1)$. Wegen der Invertierbarkeit der Sigmoiden kann eine eindimensionale Abbildung mit σ allein selbst nicht chaotisch sein. Das einfachste System ist eine Abbildung, die ein neuronales System aus zwei Neuronen beschreibt mit Aktivität x_n und y_n zu jedem Zeitschritt n , Gewichten w_{ij} und Schwellen ϑ_i , $i, j \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \vartheta_1 + w_{11}\sigma(x_n) + w_{12}\sigma(y_n) \\ y_{n+1} &= \vartheta_2 + w_{21}\sigma(x_n) \end{aligned} \quad (2.13)$$

mit Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} x_{n-1} &= \sigma^{-1}\left(\frac{y_n - \vartheta_2}{w_{21}}\right) \\ y_{n-1} &= \sigma^{-1}\left(\frac{x_n - \vartheta_1 - \frac{w_{11}}{w_{21}}(y_n - \vartheta_2)}{w_{12}}\right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ein chaotischer Attraktor ähnlich dem Hénon-Attraktor ergibt sich z.B. für die Parameter

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= -2 & , & & w_{11} &= -20 & , & & w_{12} &= 6 & , \\ \vartheta_2 &= 3 & , & & w_{21} &= -6 & . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Ein solcher Attraktor stellt statistisch betrachtet eine invariante Dichte $p^*(x)$ dar. Invariante Dichten sind seit langem in der Wahrscheinlichkeitsrechnung sowie in der statistischen Physik bekannt (siehe Anhang B). Dort gelangen sie in die Dynamik durch einen zusätzlichen Rauschterm ε_t mit seiner Verteilung $p(\varepsilon_t)$, bzw.

³¹May, R.M. (1976) Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* 261, 459–67. In Cvitanović, S. 85 ff..

³²Hénon, M. (1976) A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor, *Comm. math. Phys.* 50, 69–77. In Cvitanović, S. 341 ff..

durch Wahrscheinlichkeitsaussagen über nicht weiter betrachtete innere Freiheitsgrade (z.B. die Annahme der Gleichverteilung aller Zustände unter weiteren Nebenbedingungen, ausgedrückt durch die Extremalisierung thermodynamischer Potentiale wie Entropie, freier Energie oder Gibbs freier Enthalpie etc.).

Man kann genau wie in solchen stochastischen Prozessen auch für rein deterministische Systeme eine Zeitentwicklungsgleichung für ein Ensemble von Anfangsbedingungen $p(x_0)$, d.h. eine Perron-Frobenius-Gleichung angeben (siehe Beck & Schlögel, 1993³³ [130], Lasota & Mackay, 1994³⁴ [129], und speziell Schuster, 1988³⁵ [122], hier Seite 30.)

$$p_{n+1}(\underline{x}_{n+1}) = \int \delta(\underline{x}_{n+1} - \underline{f}(\underline{x}_n)) \cdot p_n(\underline{x}_n) d\underline{x}_n \quad (2.16)$$

und daraus versuchen, für Zeit $n \rightarrow \infty$ die invariante Dichte zu berechnen, welche eine Lösung p^* der Fixpunktgleichung

$$p^*(\underline{x}_{n+1}) = \int \delta(\underline{x}_{n+1} - \underline{f}(\underline{x}_n)) \cdot p^*(\underline{x}_n) d\underline{x}_n \quad (2.17)$$

ist (siehe Anhang C). Gleichung 2.17 hat unendlich viele Lösungen, nämlich alle instabilen Orbit, die sich durch Summen von Delta-Funktionen schreiben lassen

$$p^*(\underline{x}_n) = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^P \delta(\underline{x}_n - \underline{x}_{P,i}) \quad (2.18)$$

Hierbei sind P die Periodenlänge und $\underline{x}_{P,i}$ für $i = 1, \dots, P$ die periodischen Punkte. Physikalisch relevant sind aber nicht immer diese invarianten Dichten bestehend aus Delta-Funktionen, sondern solche, die auch invariant gegen infinitesimal kleine Störungen (Rauschen) sind (also Kolmogorov-invariante Dichten, siehe Ruelle, 1989 [126]). Dies sind in der Regel (d.h. unter ganz bestimmten Bedingungen) invariante Dichten, die glatt entlang der instabilen Richtungen sind (Sinai-Ruelle-Bowen-Maße), wobei dieser Zusammenhang für allgemeine dynamische Systeme noch der Klärung bedarf und Gegenstand intensiver Forschung ist (Ruelle, 1989 [126]).

Schon die logistische Abbildung führt zu nichtglatten fraktalen invarianten Dichten für $r \geq r_F$, mit dem Feigenbaum-Punkt $r_F = 3,5699456\dots$, siehe z.B. Grossmann & Thomae (1977)³⁶ [17], also zu nichtstetigen selbstähnlichen Funktionen. Nur am Ulam-Punkt $r_U = 4$ kann man in geschlossener Form die invariante Dichte angeben zu

$$p^*(x_n) = \frac{1}{\pi \sqrt{x_n(1-x_n)}} \quad (2.19)$$

Sie ist eine stetige Funktion in x auf dem Intervall $(0, 1)$ und divergiert nur an den Randpunkten $x = 0$ und $x = 1$. Zur Berechnung siehe Anhang C "Die Invariante Dichte der Ulam-Abbildung und ihre Lyapunov-Exponenten". Ein Beispiel für physikalisch nichtrelevante Lösungen der Perron-Frobenius-Gleichung im Sinne von Kolmogorov ist für die logistische Gleichung am Ulam-Punkt etwa die instabile Periode zwei

$$p^*(\underline{x}_n) = \frac{1}{2} (\delta(\underline{x}_n - \underline{x}_{2,1}) + \delta(\underline{x}_n - \underline{x}_{2,2})) \quad (2.20)$$

³³ Beck, C. & Schlögel, F. (1993) *Thermodynamics of chaotic systems: An introduction* (Cambridge University Press, Cambridge).

³⁴ Lasota, A. & Mackay, M.C. (1994) *Chaos, Fractals, and Noise: Stochastic Aspects of Dynamics* (Springer, New York, 2nd edition, 1st edition 1985 *Probabilistic Properties of Deterministic Systems*, Cambridge University Press, Cambridge).

³⁵ Schuster, H.G. (1988) *Deterministic Chaos: An Introduction* (VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, 2nd rev. edition).

³⁶ Grossmann, S. & Thomae, S. (1977) Invariant Distributions and Stationary Correlation Functions of One-Dimensional Discrete Processes, *Zeitschrift für Naturforschung* 32 a, 1353-63. In Cvitanović, S. 281 ff..

mit den Punkten $x_{2,1} = \frac{5}{8} \cdot (1 - \frac{1}{\sqrt{5}})$ und $x_{2,2} = \frac{5}{8} \cdot (1 + \frac{1}{\sqrt{5}})$. Solche instabilen periodischen Punkte in chaotischen Attraktoren neuronaler Netze werden in Kapitel 8 eine wichtige Rolle bei der Chaotikontrolle spielen, siehe auch Anhang F.

Nachdem nun die invariante Dichte als eine wichtige Charakterisierung beliebiger Attraktoren, insbesondere auch chaotischer, eingeführt ist, soll der Begriff der Konjugation zwischen zwei dynamischen Systemen betrachtet werden. Die Konjugation erlaubt die Umrechnung zweier Dynamiken ineinander sowie die Umrechnung der invarianten Dichten und erhält topologische Eigenschaften beider Systeme (Arrowsmith & Place, 1991)³⁷ [133]:

Betrachte zwei zeitdiskrete dynamische Systeme

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{f}(\underline{x}_n) \quad \text{und} \quad \underline{u}_{n+1} = \underline{g}(\underline{u}_n)$$

mit $\underline{f}, \underline{g}$ Diffeomorphismen, d.h. invertierbar und differenzierbar ($C^k, k \geq 1$). Eine Konjugation \underline{h} , wobei \underline{h} ein Homöomorphismus ist, d.h. invertierbar und stetig (C^0), bildet Trajektorien $(\underline{x}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(\underline{u}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ aufeinander ab

$$\begin{array}{ccc} \underline{x}_n & \xrightarrow{\underline{h}} & \underline{u}_n \\ \underline{f} \downarrow & & \downarrow \underline{g} \\ \underline{x}_{n+1} & \xrightarrow{\underline{h}} & \underline{u}_{n+1} \end{array}$$

und transformiert invariante Dichten ineinander

$$p_{\underline{f}}^*(x) \xleftrightarrow{\underline{h}} p_{\underline{g}}^*(u)$$

Daraus folgt auch, daß topologische Eigenschaften erhalten bleiben, z.B.:

- periodische Punkte und ihre Stabilität bzw. Instabilität
- Attraktordimensionen, auch fraktale Dimensionen
- Lyapunov-Exponenten

als die in der Praxis zur Zeit wichtigsten.

Wir werden später intuitive Zugänge zu den Attraktordimensionen aufzeigen (siehe Abschnitt 3.2) und auf die instabilen Perioden chaotischer Attraktoren stoßen (siehe Anhang F).

³⁷Arrowsmith, D.K. & Place, C.M. (1990) *An introduction to dynamical systems* (Cambridge University Press, Cambridge).

Hier werden die Lyapunov-Exponenten des dynamischen Systems $\underline{x}_{n+1} = \underline{f}(\underline{x}_n)$ bestimmt am Beispiel der Aktivitätendynamik des 2-Neuronenmoduls (Gl. 2.13) und verglichen mit denen der dazu konjugierten Ausgabedynamik $\underline{u}_{n+1} = \underline{g}(\underline{u}_n)$. In diesem Falle ist die Konjugation \underline{h} einfach anzugeben.

Die Definition und Berechnung der Lyapunov-Exponenten erfolgt über die Aufmultiplikation lokaler Streckungs- und Stauchungsfaktoren entlang typischer Trajektorien des Attraktors, typisch im Sinne der stationären Verteilung. Zum hier benutzten Algorithmus siehe Liebert (1991)³⁸ [137], und Stollenwerk (1992)³⁹ [7].

Für die mehrdimensionale Abbildung $\underline{x}_{n+1} = \underline{f}(\underline{x}_n)$, $\underline{x}_n \in \mathbb{R}^\nu$ bildet man entlang der Trajektorie $\{\underline{x}_n\}_{n=0}^N$ die Ableitungsmatrix (Jacobi-Matrix)

$$A(\underline{x}_n) := \left. \frac{d\underline{f}}{d\underline{x}} \right|_{\underline{x}_n} =: A_n \quad (2.21)$$

und führt für A_n eine QR-Zerlegung durch

$$A_n \cdot Q_{n-1} =: Q_n \cdot R_n \quad ,$$

wobei Q eine orthonormale und R eine rechtsdiagonale Matrix sind. Startwert ist $Q_0 = 1|$ die Einheitsmatrix. Nun multipliziert man auf:

$$\begin{aligned} A^{(N)} : &= A_N \cdot \dots \cdot A_1 \cdot A_0 \cdot 1| \\ &= A_N \cdot \dots \cdot A_1 \cdot Q_0 R_0 \\ &= A_N \cdot \dots \cdot Q_1 R_1 \cdot R_0 \\ &\vdots \\ &= Q_N R_N \cdot \dots \cdot R_1 \cdot R_0 \quad . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Das Produkt von zwei rechtsdiagonalen Matrizen ist wieder eine Rechtsdiagonalmatrix. Also ist

$$R^{(N)} := \prod_{n=0}^N R_n$$

wieder rechtsdiagonal mit Diagonalelementen $r_{jj}(N)$. Dann sind bei ν -dimensionaler Dynamik die ν Lyapunov-Exponenten aus den Schätzern für endlich lange Trajektorien der Länge N und in Abhängigkeit vom Startwert der Trajektorie \underline{x}_0 gegeben durch

$$\lambda_j(N, \underline{x}_0) := \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln(r_{jj}(n)) \quad . \quad (2.23)$$

Für $N \rightarrow \infty$ und alle Startwerte \underline{x}_0 aus dem Attraktorbasin ergeben sich hieraus die Lyapunov-Exponenten oder genauer: Nach Oseledeč (1968)⁴⁰ [13] garantiert die Ergodizität eines Systems, also die Eigenschaft, daß Zeitmittel gleich Scharmittel sind, daß die Lyapunov-Exponenten konstant sind für alle Maß- p^* -typischen Trajektorien.

Wir können nun die Lyapunov-Exponenten für die Aktivitätendynamik $\underline{x}_{n+1} = \underline{f}(\underline{x}_n)$ des Zweineuronenmoduls (siehe Gl. 2.13) berechnen. Der Attraktor ist in Abbildung 2.3 a) zu sehen.

Es ist

$$A(\underline{x}_n) := \left. \frac{d\underline{f}}{d\underline{x}} \right|_{\underline{x}_n} = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial x} \\ \frac{\partial f_x}{\partial y} & \frac{\partial f_y}{\partial y} \end{array} \right) \bigg|_{\underline{x}_n}$$

³⁸Liebert, W. (1991) *Chaos und Herzdynamik* (Verlag Harry Deutsch, Frankfurt am Main).

³⁹Stollenwerk, N. (1992) Diplomarbeit, RWTH, Aachen.

⁴⁰Oseledeč, V. (1968) A multiplicative ergodic theorem - Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, *Trans. Moscow Math. Soc.* 19, 197.

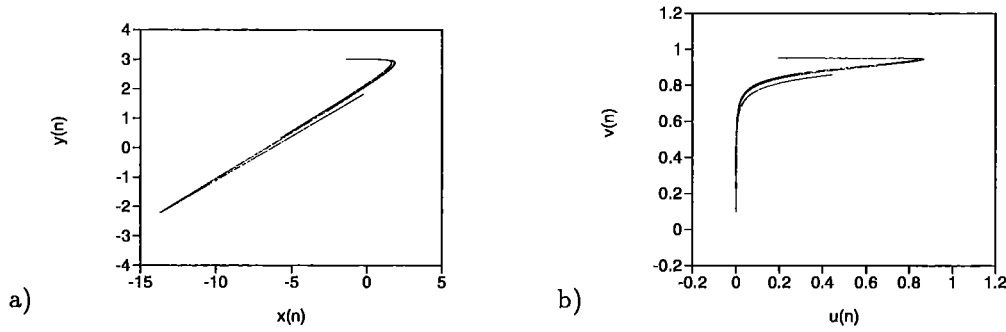


Abbildung 2.3: Der Attraktor der Aktivitätendynamik des 2-Neuronenmoduls in a) im Vergleich mit dem der Ausgabedynamik in b).

mit

$$A(\underline{x}_n) = \begin{pmatrix} w_{11}\sigma'(x_n) & w_{12}\sigma'(y_n) \\ w_{21}\sigma'(x_n) & 0 \end{pmatrix}.$$

Die QR-Zerlegung einer zweidimensionalen Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist leicht anzugeben mit $k := \sqrt{a^2 + c^2}$ durch

$$Q = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} k^2 & ab + cd \\ 0 & bc - ad \end{pmatrix}$$

zu $A = Q \cdot R$. Für die QR-Zerlegung in beliebigen Dimensionen muß ein Householder-Algorithmus herangezogen werden (Press *et al.*, 1992⁴¹ [154], Stollenwerk, 1992 [7]). Damit können wir die Lyapunov-Exponenten für das Aktivitätenmodell berechnen. Für einen typischen Startwert \underline{x}_0 auf dem Attraktor ergeben sich die geschätzten Lyapunov-Exponenten wie in Tafel 2.1 angegeben.

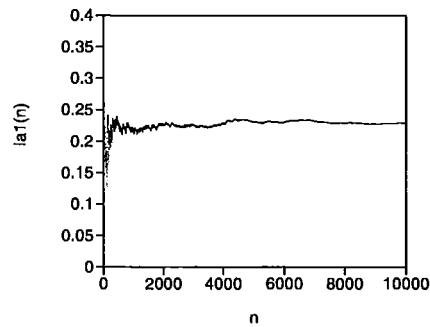


Abbildung 2.4: Berechnung einer Realisation des größten Lyapunov-Exponenten $\lambda_1(N, \underline{x}_0)$ der Aktivitätendynamik für einen typischen Startwert \underline{x}_0 .

Wir können nun noch für feste Iterationszeit $N = 1000$ ein Ensemble von Startwerten \underline{x}_0 betrachten und die Verteilung des größten Lyapunovexponenten $\lambda_1(N, \underline{x}_0)$ ansehen. Starten wir mit einem 20×20 Punktgitter im Zustandsraumbereich $x \in [-15; 5]$ und $y \in [-4; 4]$, so erhalten wir die Verteilungsfunktion wie in

⁴¹Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. & Flannery, B.P. (1992) *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing* (2nd edition, Cambridge University Press).

N	$\lambda_1(N, \underline{x}_0)$	$\lambda_2(N, \underline{x}_0)$
1000	0,2514	-3,354
10.000	0,2319	-3,348
10^7	0,2308	-3,359

Tabelle 2.1: Schätzung des Lyapunov-Spektrums der Aktivitätendynamik für verschiedene Anzahlen von Iterationen N .

Abbildung 2.5 a) angegeben. Sie paßt sehr gut auf die der Gauß-Verteilung

$$P(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy$$

mit Mittelwert $\mu = 0.2296$ und Standardabweichung $\sigma = 0.0166$. Also ist der größte Lyapunovexponent

$$\lambda_1(N = 1000) = 0,230 \pm 0,017$$

statistisch signifikant größer als Null, d.h. die Aktivitätendynamik des 2-Neuronenmoduls ist chaotisch. Zum anderen ist der Lyapunov-Exponent $\lambda_1(N)$ unabhängig von den Startbedingungen \underline{x}_0 , da die Verteilung $\lambda_1(N, \underline{x}_0)$ Gauß-verteilt ist über die Startwerte \underline{x}_0 .

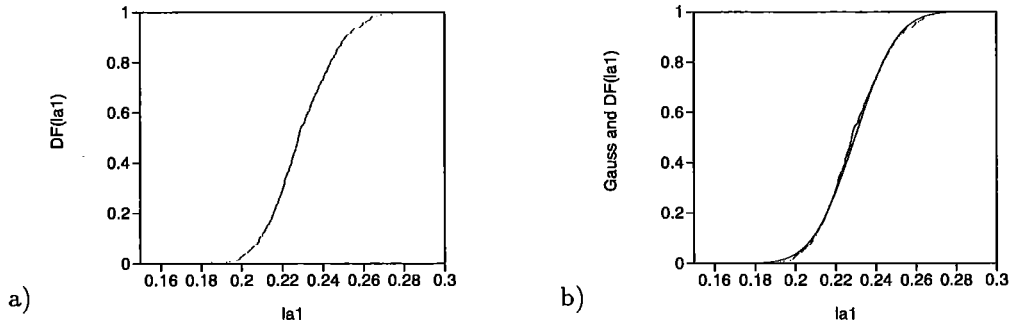


Abbildung 2.5: Die Verteilung der Realisation des größten Lyapunov-Exponenten des Aktivitätenmodells über das Gitter der Startwerte \underline{x}_0 berechnet (a)) und der Vergleich mit der Verteilungsfunktion der Gauß-Verteilung (b)).

Wir betrachten nun die Ausgabedynamik $\underline{u}_{n+1} = \underline{g}(\underline{u}_n)$ des 2-Neuronenmoduls mit Parametern wie oben. Die Konjugation \underline{h} zwischen Aktivitätendynamik und Ausgabedynamik ist hier einfach

$$\underline{x} \xleftrightarrow{\underline{h}} \underline{u}$$

mit

$$\begin{aligned} u_n &:= \sigma(x_n) \\ v_n &:= \sigma(y_n) \end{aligned} \quad (2.24)$$

so daß die Ausgabedynamik $\underline{u}_{n+1} = \underline{g}(\underline{u}_n)$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sigma(\vartheta_1 + w_{11}u_n + w_{12}v_n) \\ v_{n+1} &= \sigma(\vartheta_2 + w_{21}u_n) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Dies liefert den Attraktor wie er in Abbildung 2.3 b) zu sehen ist. Hier ist die Jacobimatrix

$$A(\underline{x}_n) = \begin{pmatrix} w_{11}\sigma'(\vartheta_1 + w_{11}u_n + w_{12}v_n) & w_{12}\sigma'(\vartheta_1 + w_{11}u_n + w_{12}v_n) \\ w_{21}\sigma'(\vartheta_2 + w_{21}u_n) & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lyapunov-Exponenten sind in Tafel 2.2 angegeben. Insbesondere fällt der Wert für $N = 1000$ mit

$$\lambda_1(N, \underline{x}_0) = 0,226$$

der Ausgabedynamik gut in das Ensemble für die Aktivitätendynamik mit

$$\lambda_1(N, \underline{x}_0) = 0,230 \pm 0,017 \quad .$$

N	$\lambda_1(N, \underline{x}_0)$	$\lambda_2(N, \underline{x}_0)$
1000	0,2262	-3,371
10.000	0,2291	-3,363
10^7	0,2305	-3,359

Tabelle 2.2: Schätzung des Lyapunov-Spektrums der Ausgabedynamik.

Die positiven Lyapunov-Exponenten bestimmen das Verhalten der Vorhersagbarkeit in chaotischen Attraktoren, wie im nun folgenden Abschnitt dargestellt werden wird. Die Vorhersagbarkeit ist eine aus empirischen Zeitreihen gut zugängliche Größe, in denen ja nicht direkt die Ableitungsmatrix des Systems bekannt ist. Im Datenteil wird die Vorhersagbarkeit auf Interspike-Intervalle angewendet werden.

Kapitel 3

Praktische Größen für nichtlineare Zeitreihen

3.1 Vorhersagemethoden

Die Untersuchung der lokalen Streckungs- und Stauchungsfaktoren im Zustandsraum, die die Essenz der Aufmultiplikation der Jakobimatrizen entlang einer typischen Trajektorie bei der Berechnung der Lyapunov-Exponenten ist, kann auf empirische Meßdaten im Einbettungsraum der verzögerten Koordinaten übertragen werden.

Entlang einer Einbettungstrajektorie $\underline{x}_n, \underline{x}_{n+1}, \dots$ werden die im Einbettungsraum benachbarten Trajektorienstücke $\underline{x}_i, \underline{x}_{i+1}, \dots$ betrachtet, die in der zeitlichen Entwicklung der Meßdaten weit früher (oder zur besseren Datenausnutzung auch weit später) liegen. Die Nachbarn \underline{x}_i in ε -Umgebung des Punktes \underline{x}_n bilden im Einbettungsraum eine Punktwolke um \underline{x}_n . Diese Punktwolke der \underline{x}_i wird im nächsten Zeitschritt auf einen Ellipsoid der Punkte \underline{x}_{i+1} um den nächsten Trajektorienpunkt \underline{x}_{n+1} abgebildet mit gestreckten Achsen in den lokal instabilen Richtungen und gestaucht in den lokal stabilen Richtungen.

Bei endlicher Anzahl von Nachbarn und Systemrauschen wird \underline{x}_n nicht in der Mitte der Punktwolke der \underline{x}_i liegen, sondern um ε_n versetzt. Durch die Zeitentwicklung der Punktwolke \underline{x}_i wird zur Zeit $n+1$ der Schwerpunkt der Wolke \underline{x}_{i+1} eine Vorhersage $\hat{\underline{x}}_{n+1}$ für den Punkt \underline{x}_{n+1} liefern, wobei der Vorhersagefehler

$$\varepsilon_{n+1} := \|\underline{x}_{n+1} - \hat{\underline{x}}_{n+1}\|$$

gemacht wird. Dieser Vorhersagefehler ist aus den empirischen Daten bestimmbar, da aus den Punkten \underline{x}_{i+1} die Vorhersage $\hat{\underline{x}}_{n+1}$ gemacht wird, etwa aus Kenntnis der relativen Lage von \underline{x}_n in der \underline{x}_i -Punktwolke, und mit der tatsächlichen Zeitentwicklung der Trajektorie \underline{x}_{n+1} verglichen werden kann.

Neben der Einschrittvorhersage $\hat{\underline{x}}_{n+1}$ können auch Mehrschrittvorhersagen $\hat{\underline{x}}_{n+h}$ mit Vorhersagehorizont h gemacht werden. Bei einem chaotischen System sollte der Vorhersagefehler ε_{n+h} wegen der Sensitivität gegen kleine Störungen schnell mit zunehmendem Vorhersagehorizont h wachsen, genau genommen exponentiell schnell, da die positiven Lyapunov-Exponenten das Stecken entlang der instabilen Richtungen messen. Verschiedene Algorithmen zur Bestimmung der Prediktoren sind vorgeschlagen worden. Wir werden am Ende dieses Abschnittes die drei gängigen Versionen zu lokal linearen Vorhersagen vorstellen.

Ein einmal bestimmter Prediktor $\hat{\underline{x}}_{n+h}$ führt also zu einem Einzelvorhersage-

fehler

$$\varepsilon_{n+h}^2 := \|\underline{x}_{n+h} - \hat{\underline{x}}_{n+h}\|^2 = \sum_{\nu=0}^{E-1} (x_{n+h+\nu} - \hat{x}_{n+h+\nu})^2 \quad (3.1)$$

Der relative Gesamtvorhersagefehler $E_g(h)$ ist dann definiert als Mittelung der Fehler über die gesamte Zeitreihe \underline{x}_n

$$E_g(h) := \frac{1}{\sigma_p} \sqrt{\frac{1}{N-h-(E-1)} \sum_{n=1}^{N-h-(E-1)} \varepsilon_{n+h}^2} \quad (3.2)$$

mit der Normierung über die Standardabweichung der in der Vorhersage benutzten Punkte

$$\sigma_p := \sqrt{\frac{1}{N-h-(E-1)} \sum_{i=1}^{N-h-(E-1)} (\underline{x}_i - \langle \underline{x} \rangle)^2} \quad (3.3)$$

mit dem Mittelwert der Zeitreihe $\langle \underline{x} \rangle$.¹

Dieser Vorhersagefehler $E_g(h)$ skaliert nach Farmer & Sidorowich (1987) [25] (Gleichung (2) in deren Artikel) mit

$$E_g(h) = C e^{(\mathcal{O}+1)\Lambda \cdot h} \cdot N^{-\frac{(\mathcal{O}+1)}{D_2}} \quad (3.4)$$

mit \mathcal{O} der Ordnung der zur Bestimmung der Prediktoren benutzten Approximation (hier lokal linear, d.h. $\mathcal{O} = 1$) und Λ der metrischen Entropie², bzw. bei nur einem positiven Lyapunov-Exponenten eben dieser.

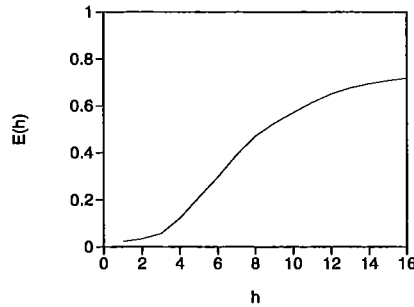


Abbildung 3.1: Vorhersagetest. Vorhersagefehler E_g aufgetragen gegen den Vorhersagehorizont h für eine Zeitreihe der x -Komponente des Zweineuronenmoduls.

Wir benutzen hier den einfachsten Prediktor nach Schiff, Sauer & Chang (1994) [35], definiert durch

$$\hat{\underline{x}}_{n+h} := \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \underline{x}_{i+h} \quad (3.5)$$

als Mittelwert der zur Zeit n nächsten p Nachbarn \underline{x}_i in der Zeitentwicklung \underline{x}_{i+h} mit Vorhersagehorizont h .

Für das Zweineuronenmodul ergibt sich damit der Vorhersagefehler E_g nach Abbildung 3.1 für $N = 20000$ Punkte der Zeitreihe der x -Komponenten, Einbettungsdimension $E = 2$. Die nächsten Nachbarn sind aus der ε -Umgebung mit einem

¹Farmer & Sidorowich (1987) [25]. Reprint in Ott, Sauer & Yorke (1994)[124].

²Die metrische Entropie Λ ist gleich der Summe der positiven Lyapunov-Exponenten für sogenannte Axiom-A-Systeme. Die Standardbeispiele der nichtlinearen Dynamik wie z.B. der Hénon-Attraktor gehören nicht in diese (etwas pathologische) Klasse. Numerische Rechnungen haben aber die Richtigkeit dieser Hypothese auch für den Hénon-Attraktor gezeigt (siehe Beck & Schlögl, 1993, [130] für weitere Ausführungen.)

zwanzigstel der Standardabweichung des Attraktors gewählt. Da nur ein Lyapunov-Exponent größer als Null ist, ergibt sich die Skalierung mit h zu

$$E_g(h) \sim e^{2 \cdot \lambda_1 \cdot h}$$

mit der h -Skalierung $2 \cdot \lambda_1 = 0.454 \pm 0.05$ in Übereinstimmung mit dem größten Lyapunov-Exponenten $\lambda_1 = 0.230$ des Attraktors des Zweineuronenmoduls. Wie aus Abbildung 3.1 ersichtlich, gilt die exponentielle Divergenz nur für die ersten Vorhersageschritte, natürlich in Abhängigkeit von der ε -Umgebung, aus der die Nachbarn stammen. Danach wächst die Unvorhersagbarkeit schnell auf die gesamte Attraktorgroße an, was insgesamt zu der S-förmigen Kurve führt.

Wir stellen nun noch die gängigen Algorithmen zur Bestimmung des Prediktors \hat{x}_{n+h} dar. Die drei Algorithmen nach Farmer & Sidorowich (FS), Sugihara & May (SM) und nach Schiff, Sauer & Chang (SSC) lassen sich am besten aus dem SM-Algorithmus heraus erläutern. Nach Sugihara & May (1990) [29] suchen wir für den eingebetteten Zeitreihenpunkte \underline{x}_n in E Einbettungsdimensionen die $E + 1$ Nachbarn \underline{x}_i und benennen sie mit $\underline{x}_i(t)$ für $i = 0, 1, 2, \dots, E$. Die $E + 1$ Punkte bilden ein E-Simplex um \underline{x}_n .

Der Punkt \underline{x}_n läßt sich in relativen Koordinaten α_i für $i = 1, \dots, E$ des Simplex darstellen als

$$\underline{x}_n = \underline{x}_0(t) + \sum_{i=1}^E \alpha_i (\underline{x}_i(t) - \underline{x}_0(t)) \quad (3.6)$$

in der Simplexbasis der Vektoren $z_i(t) := \underline{x}_i(t) - \underline{x}_0(t)$.

Aus der Zeit t entwickeln sich die Simplex-Eckpunkte $\underline{x}_i(t)$ zu den Simplex-Eckpunkten $\underline{x}_i(t+h)$ zur Zeit $t+h$ im Einbettungsraum. Die Annahme der lokal linearen Abbildung im Einbettungsraum ist nun: Die zukünftige Entwicklung des Punktes \underline{x}_n sei relativ zum Simplex der lokalen Nachbarn beschreibbar, d.h. die relativen Koordinaten α_i seien zeitlich konstant. Daraus folgt der Prediktor nach Sugihara & May:

$$\hat{x}_{n+h}^{SM} = \underline{x}_0(t+h) + \sum_{i=1}^E \alpha_i (\underline{x}_i(t+h) - \underline{x}_0(t+h)) \quad (3.7)$$

mit den noch zu bestimmenden Koeffizienten α_i . Wir bestimmen nun die α_i wie folgt:

In Matrixschreibweise ergibt sich

$$\underline{x}_n = Z(t) \cdot \underline{\alpha} + \underline{x}_0(t) \quad (3.8)$$

mit

$$Z(t) := \begin{pmatrix} z_{11}(t) & \dots & z_{E1}(t) \\ \vdots & & \\ z_{1E}(t) & \dots & z_{EE}(t) \end{pmatrix}$$

für die Simplexbasisfunktionen $z_i(t) = (z_{i1}(t), \dots, z_{iE}(t))^{\text{tr}}$ und den Koeffizientenvektor $\underline{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_E)^{\text{tr}}$.

Also ergibt sich bei angenommener Invertierbarkeit, d.h. nicht entartetem Simplex, die Bestimmung des Koeffizientenvektors zur Kompletierung von Gleichung 3.7, dem Sugihara-May-Prediktor:

$$\underline{\alpha} = (Z(t))^{-1} \cdot (\underline{x}_n - \underline{x}_0(t)) \quad (3.9)$$

Der Prediktor nach Sugihara & May ist damit tatsächlich eine lokal lineare Abbildung des Punktes \hat{x}_n auf \underline{x}_{n+h} mit Matrizen A und \underline{b} aus der Kenntnis der Nachbarn $\underline{x}_i(t)$ und $\underline{x}_i(t+h)$, denn:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{n+h}^{SM} &= Z(t+h)\underline{x} + \underline{x}_0(t+h) \\
 &= Z(t+h)(Z^{-1}(t) \cdot (\underline{x}_n - \underline{x}_0(t))) + \underline{x}_0(t+h) \\
 &= \underbrace{(Z(t+h) \cdot Z^{-1}(t))}_{=:A} \underline{x}_n + \underbrace{(\underline{x}(t+h) - Z(t+h)Z^{-1}(t)\underline{x}_0(t))}_{=:b} \quad (3.10) \\
 &= A\underline{x}_n + \underline{b} .
 \end{aligned}$$

Die Nachbarn \underline{x}_i erfüllen dieselbe lineare Abbildung

$$\underline{x}_i(t+h) = A\underline{x}_i(t) + \underline{b} . \quad (3.11)$$

Bisher haben wir $(E+1)$ Nachbarn mit $i = 0, 1, \dots, E$ als Simplexecken des E -dimensionalen Einbettungsraumes (nach Sugihara & May) betrachtet. Wir können statt dieser Interpolation zur Konstruktion der lokal linearen Abbildung $\hat{x}_{n+h} = A\underline{x}_n + \underline{b}$ jetzt auch eine Approximation mit $i = 1, \dots, p$ mit $p > E+1$ Nachbarn durchführen.

Vernachlässigen wir dabei die relative Lage von \underline{x}_n in der Punktwolke der $\underline{x}_i(t)$, die jetzt den Simplex ersetzt, und setzen

$$\alpha_i := \frac{1}{p} \quad (3.12)$$

für alle i konstant, so erhalten wir die Formel für den Schiff-Sauer-Chang-Prediktor:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{n+h}^{SSC} &= \underline{x}_0(t+h) + \sum_{i=1}^p \alpha_i (\underline{x}_i(t+h) - \underline{x}_0(t+h)) \\
 &= \underline{x}_0(t+h) + \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p (\underline{x}_i(t+h) - \underline{x}_0(t+h)) \cdot \underbrace{\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p 1}_{=1} \quad (3.13) \\
 &= \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \underline{x}_i(t+h) .
 \end{aligned}$$

Suchen wir dagegen die lokal lineare Abbildung $\hat{x}_{n+h} = A\underline{x}_n + \underline{b}$ aus $p \geq E+1$ Nachbarn unter Berücksichtigung der relativen Lage in der Punktwolke zur Zeit t , so müssen wir eine Approximation etwa mittels *least squares* durchführen und erhalten damit den Prediktor nach Farmer & Sidorowich, den wir im Folgenden betrachten:

Wir schreiben zunächst die lokal lineare Abbildung für alle Nachbarnpunkte \underline{x}_i für $i = 1, \dots, p$ als Matrixgleichung mit Koeffizientenmatrix C , Matrix der Zustandsvektoren $S = X(t)$ und der zeitentwickelten Zustandsvektoren $Y = X(t+h)$, um dann die Least Squares Approximation per Singulärwertzerlegung (SVD-*singular value decomposition*) durchführen zu können zur Bestimmung der Koeffizientenmatrix.

Im einzelnen:

$$\begin{aligned}
 \underline{x}_i(t+h) &= A \underline{x}_i(t) + \underline{b} \\
 &= \underbrace{\begin{pmatrix} A & \vdots & \underline{b} \end{pmatrix}}_{=: \mathcal{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{x}_i(t) \\ 1 \end{pmatrix}}_{=: X_i(t)} \\
 &= \mathcal{A} \cdot X_i(t)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

mit der Notation

$$\begin{pmatrix} A & \vdots & \underline{b} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1E} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{E1} & \dots & a_{EE} & b_E \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \underline{x}_i(t) \\ 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_{i1}(t) \\ \vdots \\ x_{iE}(t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also ergibt sich aus den transponierten Matrizen

$$\begin{aligned}
 \underline{x}_i^{tr}(t+h) &= (\mathcal{A} \cdot X_i(t))^{tr} = (X_i(t))^{tr} \mathcal{A}^{tr} \\
 &= \begin{pmatrix} \underline{x}_i(t)^{tr} & \vdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^{tr} \\ \underline{b}^{tr} \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

für das gesamte System der Nachbarn $(\underline{x}_i(t))_{i=1}^p$ folgende Matrixgleichung:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \underline{x}_1^{tr}(t+h) \\ \underline{x}_2^{tr}(t+h) \\ \vdots \\ \underline{x}_p^{tr}(t+h) \end{pmatrix}}_{=: X(t+h)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{x}_1^{tr}(t) & \vdots & 1 \\ \underline{x}_2^{tr}(t) & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{x}_p^{tr}(t) & \vdots & 1 \end{pmatrix}}_{=: X(t)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} A^{tr} \\ \underline{b}^{tr} \end{pmatrix}}_{=: \mathcal{A}^{tr}} \tag{3.16}$$

mit der $(p \times E)$ -Matrix $X(t+h) =: Y$, der $(p \times (E+1))$ -Matrix $X(t) =: S$ und der $((E+1) \times E)$ -Matrix $\mathcal{A}^{tr} =: C$. Beachte, daß $X(t+h)$ nicht einfach die Matrix $X(t)$ mit Zeitverschiebung $t \rightarrow t+h$ ist.

Diese Gleichung 3.16

$$X(t+h) = X(t) \cdot \mathcal{A}^{tr}$$

ist nur exakt lösbar im Fall der Interpolation mit $p = (E+1)$ Nachbarn und Invertierbarkeit von $X(t)$. Für $p > (E+1)$ gilt die Gleichung im Allgemeinen nur näherungsweise, d.h. \mathcal{A} muß durch Fehlerminimierung, z.B. durch *least squares* (= kleinste Fehlerquadrate), approximiert werden:

$$\sum_{\nu=1}^E \|Y_\nu - S \cdot C_\nu\|_p^2 =: \chi^2 \stackrel{!}{=} \min \tag{3.17}$$

mit Y_ν und C_ν jeweils den ν -ten Spalten der entsprechenden Matrizen, bzw. mit $B := Y - SC$ auch zu schreiben als

$$\text{spur}(B^{tr} B) = \chi^2 \tag{3.18}$$

Die Minimierung von χ^2 , d.h. $\frac{d}{dC}\chi^2 \stackrel{!}{=} 0$ liefert

$$S^{tr} S \cdot C = S^{tr} Y \quad \text{bzw.} \quad SC = Y \quad (3.19)$$

wobei $(S^{tr} S)$ eine symmetrische $((E+1) \times (E+1))$ -Matrix ist, auch im Falle von nichtquadratischen Matrizen S bei $p > E+1$.

Bei Invertierbarkeit von $(S^{tr} S)$ ist die Koeffizientenmatrix also gegeben mit

$$C = (S^{tr} S)^{-1} S^{tr} Y \quad (3.20)$$

Ansonsten muß S mit einer Singulärwertzerlegung (z.B. Press *et al.*, 1992 [154]) mit

$$S = UWV^{tr} \quad (3.21)$$

in eine Penrose-Pseudoinverse

$$S^+ = VW^+U^{tr} \quad (3.22)$$

gebracht werden, so daß

$$S^+ S = 1| \quad (3.23)$$

die Einheitsmatrix ergibt, um $SC = Y$ zu lösen. Hierbei sind U und V links-orthonormal, d.h. $U^{tr} U = 1|$ und $V^{tr} V = 1|$, dabei V quadratisch, und $W = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{E+1})$ die Diagonalmatrix der Singulärwerte. Die Matrix W^+ enthält einfach die Inversen der Singulärwerte. Da kleine Singulärwerte wenig zu S beitragen, aber ihre Inversen sehr groß werden, sind sie die Hauptrauschverstärker bei der Matrixinvertierung. Diese störenden kleinen Singulärwerte werden deshalb unterhalb eines *cut-off* σ_s in der W -Invertierung zu Null gesetzt:

$$W^+ = \text{diag} \left(\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_s}, 0, \dots, 0 \right) \quad (3.24)$$

Welche Singulärwerte als klein zu betrachten sind, hängt vom Problem ab. Der Schnitt (*cut-off* mit σ_s) kann zum Beispiel bei globalen Approximationen mit beliebigen Basisfunktionen durch weitere Gütekriterien bestimmt werden (Stollenwerk, 1992 [7]: dort Radialbasisfunktionen (RBF) an die erste Hälfte der Daten angepaßt, und mit Einschnittvorhersagefehlern auf dem zweiten Teil der Daten die Güte der Anpassung in Abhängigkeit vom *cut-off* s getestet, Beispiele Hénon-Attraktor und empirische Zeitreihe.) Die Singulärwertzerlegung einer Matrix S selbst ist wie folgt durchzuführen:

Zur Singulärwertzerlegung der Matrix S bestimme die Eigenwerte λ_j der quadratischen und positiv definiten Matrix $H := S^{tr} S$ samt deren Eigenvektoren \underline{v}_j , also $H \underline{v}_j = \lambda_j \underline{v}_j$. Die Vektoren \underline{v}_j bilden die Spalten der Matrix V der Singulärwertzerlegung, während die Singulärwerte selbst $\sigma_j := \sqrt{\lambda_j}$ die Wurzeln der Eigenwerte sind. Die Matrix U besteht schließlich in ihren Spalten aus den Vektoren $\underline{u}_j := \frac{1}{\sigma_j} \cdot S \underline{v}_j$.

Zur geometrischen Anschauung der Singulärwertzerlegung siehe weitere Ausführungen in meiner Diplomarbeit (Stollenwerk, 1992 [7]). Mit der Pseudoinversen ist schließlich die Koeffizientenmatrix C gegeben mit

$$C = S^+ Y \quad (3.25)$$

Im Fall der lokal linearen Anpassung zur Farmer-Sidorowich-Vorhersage ist also die Koeffizientenmatrix

$$C = \mathcal{A}^{tr} = \begin{pmatrix} A^{tr} \\ \underline{b}^{tr} \end{pmatrix}$$

im Allgemeinen bestimmt durch die Penrose-Pseudoinverse $(X(t))^+$ aus der Singulärwertzerlegung der Matrix

$$X(t) = \begin{pmatrix} \underline{x}_1^{tr}(t) & \vdots & 1 \\ \underline{x}_2^{tr}(t) & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{x}_p^{tr}(t) & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

und dem Vektor

$$X(t+h) = \begin{pmatrix} \underline{x}_1^{tr}(t+h) \\ \underline{x}_2^{tr}(t+h) \\ \vdots \\ \underline{x}_p^{tr}(t+h) \end{pmatrix}$$

der Nachbarn \underline{x}_i des vorherzusagenden Punktes \underline{x}_n zu

$$\begin{pmatrix} A^{tr} \\ \underline{b}^{tr} \end{pmatrix} = (X(t))^+ \cdot X(t+h) \quad (3.26)$$

Damit ist der **Farmer-Sidorowich Prediktor**

$$\hat{\underline{x}}_{i+h}^{FS} = A \underline{x}_i + \underline{b} \quad (3.27)$$

mit den Koeffizientenmatrizen A und \underline{b} aus Gleichung 3.26 bestimmt. Für den Fall $p = E + 1$ führt Gleichung 3.26 wieder auf den Fall der Sugihara-May-Methode zurück.

Lokale Approximation ist nicht nur mit linearen, sondern auch mit nichtlinearen Basisfunktionen möglich. Beispiele sind Polynome oder Radialbasisfunktionen (Casdagli, 1989 [27]) Bei hoch gesampleten Datensätzen reichen lokal lineare Approximationen, was dem Schätzen der Jakobimatrix in der Berechnung der Lyapunov-Exponenten entspricht. Bei spärlich aufgenommenen Daten haben sich auch in einigen Fällen globale Approximationen, wieder mit Radialbasisfunktionen, als günstig erwiesen (siehe Stollenwerk, 1992 [7]).

3.2 Recurrence-Plots und fraktale Dimensionen

Nachdem wir die Vorhersagbarkeit als eine erste Möglichkeit der Untersuchung von empirischen Daten auf mögliche Chaotizität betrachtet haben, kommen wir nun zur Beschreibung der Dimension als weiterem Charakteristikum nichtlinearer dynamischer Systeme. Hier führt die mögliche Seltsamkeit des Attraktors zu nichtganzzahligen, d.h. fraktalen Dimensionen.

Typische Attraktoren dynamischer Systeme wie z.B. der Rössler- oder der Hénon-Attraktor sind chaotisch, also sensitiv gegenüber kleinen Störungen, und seltsam zugleich, also im Zustandsraum Fraktale. Dagegen ist die Ulam-Abbildung chaotisch (mit Lyapunov-Exponent $\lambda = \ln(2) > 0$), aber liefert als invariante Dichte kein Fraktal, sondern eine glatte Verteilung. Außerhalb des Ulam-Punktes $r_U = 4$ ist die logistische Abbildung aber für viele r sowohl chaotisch als auch fraktal (siehe z.B. den Feigenbaum-Attraktor bei $r_F = 3.59$, Ruelle, 1989 [126]). Der Ulam-Attraktor füllt den Zustandsraum $[0, 1]$ vollständig aus, hat also die Dimension 1, während der Feigenbaumattraktor nur einen Teil des Intervalls beansprucht, aber aus unendlich vielen Punkten in selbstähnlicher Weise besteht, also eine Dimension zwischen Null und Eins hat.

Wir führen hier die in der Datenanalyse wesentliche Dimension, die Korrelationsdimension D_2 nach Grassberger & Procaccia (1983) [20] über den Recurrence-Plot nach Eckmann, Kamphorst & Ruelle (1987)³ [24] ein. Dieses Vorgehen ist darin begründet, daß für biologische, speziell neurobiologische Systeme selten über lange Zeiträume in den Parametern stabile Experimente durchgeführt werden können. Der Recurrence-Plot gibt in viel detaillierterer Weise Informationen über geeignete Zeitbereiche einer Meßreihe zu weiteren Analysen (Problem der Stationarität in biologischen Experimenten) bzw. auch über die Zeitskala der im weiteren interessierenden Eigenschaften des Systems, als es so hoch kondensierte Maße wie die Korrelationsdimension oder der größte Lyapunov-Exponent kann, die über eine ganze Messung gemittelt sind. Aus dem Recurrence-Plot lassen sich diese kondensierten Maße aber wieder konstruieren, wie hier am Beispiel der Korrelationsdimension D_2 gezeigt werden wird.

Sei aus einer Messung die Zeitreihe $(x_n)_{n=1}^N$ gegeben, z.B. die der x-Komponente des Hénon-Systems (Gl. 2.9), welches im Folgenden unser Beispiel sein wird. Betrachte die Einbettung

$$\underline{x}_n := (x_n, x_{n+\tau}, \dots, x_{n+(E-1)\tau})^{tr} .$$

Für Zeitschritte n und m definiere den Abstand zweier Zeitreihenstücke mit der E -dimensionalen Norm

$$\begin{aligned} c_{n,m} &:= \|\underline{x}_n - \underline{x}_m\|_E \\ &= \sqrt{\sum_{\nu=0}^{E-1} (x_{n+\nu\tau} - x_{m+\nu\tau})^2} . \end{aligned} \tag{3.28}$$

Der Recurrence-Plot ist nun so definiert, daß auf der Abszisse der Index n und auf der Ordinate der Index m aufgetragen sind. Jeder Punkt wird schwarz markiert, wenn $c_{n,m} \leq \varepsilon$ ist und weiß, wenn $c_{n,m} > \varepsilon$ ist für einen vorgegebenen Abstand ε . Gemessen wird also der Abstand zwischen einem Zeitreihenstück der Länge E und einem früheren Zeitreihenstück derselben Länge, also ob eine Rekurrenz mit ε -Genauigkeit auftritt.

³Eckmann, J.P., Kamphorst, S.O. & Ruelle, D. (1987) Recurrence Plots of Dynamical Systems, *Europhys. Lett.* 4, 973-977.

Für jedes Paar der noch freien Parameter ε und E erhalten wir einen eigenen Recurrence-Plot, jeweils für alle Abstände $c_{n,m}$, die kleiner oder gleich ε sind bei gegebener Einbettungsdimension E . Es gibt insgesamt

$$N_T = \frac{1}{2} N(N-1)$$

unabhängige Abstände $c_{n,m}$, da per Konstruktion $c_{n,m} = c_{m,n}$ symmetrisch und $c_{m,m} = 0$ entlang der Hauptdiagonalen sind. Die unabhängigen Abstände sind z.B. alle Punkte unterhalb der Hauptdiagonalen des Recurrence-Plots.

Nun ist die Anzahl der unabhängigen schwarzen Punkte des Recurrence-Plots, also aller Zeitreihenstücke zur Zeit n mit Rekurrenz zur Zeit m , gerade das **Korrelationsintegral** nach Grassberger & Procaccia (1983) [20]

$$C_2(\varepsilon, E) = \frac{1}{N_T} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} \Theta(\varepsilon - \|\underline{x}_n - \underline{x}_m\|_E) \quad (3.29)$$

mit der Stufenfunktion $\Theta(x)$ definiert durch

$$\Theta(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Das Korrelationsintegral hat mathematisch genau die Form eines Schätzers der Verteilungsfunktion der Abstände $c_{n,m}$ bei fester Einbettungsdimension E mit korrekter Normierung N_T (zu den Verteilungsfunktionen siehe Bemerkungen in Abschnitt 5.3.1 zu Hypothesentests). Das hat zur Folge, daß bei geeigneter Auftragung, i.e. Ordnen der $c_{n,m}$ der Größe nach auf der Abszisse und Auftragung des Ordnungsindex dividiert durch die Gesamtzahl N_T der Abstände auf der Ordinate, schon mit relativ geringer Datenmenge das Skalierungsverhalten bestimmt werden kann, ohne über die Probleme beim *binning* der Daten für die Verteilung selbst zu stolpern (zu den Details siehe wieder Anhang 5.3.1). Für große Datenmengen wie im Falle der Feldpotentialableitung im periodisch stimulierten Hippocampus (Abschnitt 6) dagegen empfiehlt sich die Aufsummierung aller Abstände $c_{n,m} \leq \varepsilon_\nu$ für fest vorgegebene Distanzen ε_ν .

Aus dem Korrelationsintegral $C_2(\varepsilon, E)$ kann nun per doppelt logarithmischer Auftragung die Korrelationsdimension D_2 als ε -Skalierung

$$C_2(\varepsilon, E) \sim \varepsilon^{D_2} \quad (3.31)$$

für große Einbettungsdimensionen E nach der Sättigung und die Korrelationsentropie K_2 als Skalierung der Differenz zwischen zwei Kurven der Einbettungsdimension E und $E+1$ bei festem ε_{test} in der Skalierungsregion

$$C_2(\varepsilon, E) \sim e^{-K_2 \cdot E \cdot \tau} \quad (3.32)$$

bestimmt werden.

Zur Veranschaulichung der Bedeutung und Interpretation des Recurrence-Plots und seiner Verbindung zum Korrelationsintegral zeigen wir hier die Anwendung auf den in der Literatur ausführlich diskutierten Hénon-Attraktor. Die Idee des Recurrence-Plots stammt von Eckmann, Kamphorst und Ruelle, die einen Zusammenhang der mittleren Länge der Streifen parallel zur Hauptdiagonalen mit dem größten Lyapunov-Exponenten sehen. Die hier dargestellte Verbindung zum Korrelationsintegral wird bisher selten genutzt.

Das Hénon-System (Gl. 2.9) für die Parameter $a = 1.4$ und $b = 0.3$ liefert den in Abbildung 3.2 a) gezeigten chaotischen Attraktor.

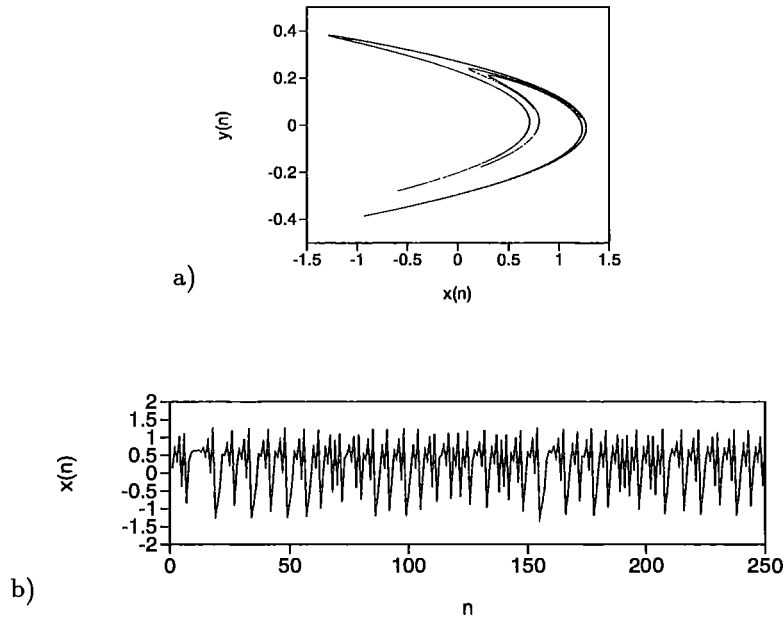


Abbildung 3.2: Der Hénon-Attraktor und eine Zeitreihe der x -Komponenten, die schon optisch einige dynamische Rekurrenzen zeigt.

Beim Betrachten der Zeitreihe der x -Komponente $(x_n)_{n=1}^N$ in Abbildung 3.2 b) fallen die in unregelmäßigen Abständen auftretenden ähnlichen Muster auf, etwa der breite Wellenzug bei ca. $n = 10$ und bei 160 oder 210, oder das stark oszillierende Muster bei $n = 140$ und 190. Hier sind über längere Zeiten ähnliche Muster ε -nah, die nach einiger Zeit aber ganz unterschiedliche Fortentwicklungen zeigen, d.h. wieder aus ihrer ε -Nachbarschaft verschwinden. Dieses Verhalten gibt im Recurrence-Plot in Abbildung 3.3 die Streifen unterschiedlicher Länge parallel zur Diagonalen der Identität $n = m$. Im Hénon-Attraktor ist die Sensitivität der Trajektorie gegen kleine Abweichungen bekannt und zeigt sich hier deutlich im Recurrence-Plot über die gesamte Zeit hinweg. Reines Rauschen zeigt eher Schachbrettmuster und viel seltener zufällig mal einige Streifen. Der Vergleich mit Rauschsystemen wird systematisch im Datenteil mit der Surrogatmethode durchgeführt werden.

Daß die Skalierung des aus diesem Recurrence-Plot gewonnenen Korrelationsintegral in der Skalierung mit den noch variablen Parametern ε und E die aus der Literatur bekannten Ergebnisse liefert, zeigt Abbildung 3.4 mit deutlicher Skalierungsregion für $\ln(\varepsilon) = -2$ bis $+1$ so wie die bekannten Abweichungen für große ε im Bereich der Gesamtattraktorgroße und für kleine ε im Bereich der Auflösungsgenauigkeit für den endlich langen Datensatz mit N Datenpunkten.

Die Steigung der Kurven im Skalierungsbereich variiert zunächst für Einbettungsdimensionen $E = 1$ und $E = 2$, oberste Kurve und zweite von oben. Dann laufen die Kurventeile für größeres E parallel. Dort ist die Steigung die Korrelationsdimension

$$D_2 = 1,20 \pm 0,02 \quad .$$

Für ein typisches $\ln(\varepsilon_{test}) = -1$ zeigt der Abstand der Kurven für aufsteigende Einbettungsdimensionen E das Skalierungsverhalten mit der Korrelationsentropie

$$K_2 = 0,316 \pm 0,011 \quad .$$

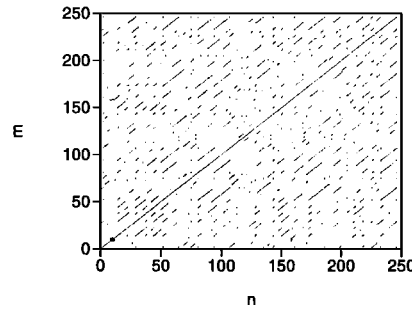


Abbildung 3.3: Der Recurrence-Plot zeigt deutlich Streifen parallel zur Hauptdiagonalen. Die Einbettungsdimension ist hier $E = 5$ und der Abstand zwischen rekurrenten Zeitreihenstücken ist $\ln(\varepsilon) = -1.0$.

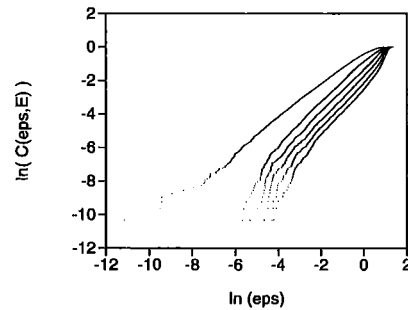


Abbildung 3.4: Der Grassberger-Procaccia-Plot der x -Zeitreihe des Hénon-Attraktors für $N = 250$ Punkte als doppelt logarithmische Auftragung der Verteilungsfunktion aller unabhängigen Abstände zwischen Zeitreihenpunkten in Abhängigkeit von Einbettungsdimension $E = 1, 2, \dots, 6$ und Größe der Abstände ε .

Dies entspricht gut den in der Literatur angegebenen Werten⁴ für den Hénon-Attraktor.

Man hat zunächst die Nichtganzzahligkeit der Korrelationsdimension D_2 , also die unvollständige Ausfüllung der Zustandsraumkästchen des Volumens ε^E mit Attraktorpunkten, als Zeichen für seltsame Attraktoren gewertet. Es zeigte sich später, daß korreliertes Rauschen ähnliches Skalierungsverhalten haben kann wie rein deterministische Systeme (Osborne & Provenzale, 1989)⁵ [28]. Hieraus folgt die Notwendigkeit zum statistischen Gegenteilstest der jeweils zu untersuchenden Daten gegen lineare verrauschte Modelle. Dies wurde sehr erleichtert durch die Entwicklung der Surrogatdatenerzeugung aus phasenrandomisierter Fouriertransformation (Theiler *et al.*, 1992)⁶ [33].

Zudem sind die Dimensionen als Zahlen in empirischen Systemen oft gar nicht so aussagekräftig, wie die Detektion von nichtlinear deterministischen Anteilen in der Dynamik versus Rauschen. Es reicht oft schon, im Plot des Korrelationsintegrals eine ε -Skalierung genügend abweichend von den Surrogaten als Kriterium für wesentlichen nichtlinearen Determinismus zu detektieren. So sind die *coarse grained dimensions* zu verstehen als Skalierung im schon gesättigten Bereich der

⁴Schuster, H. (1988) [122], S.128: $D_2 = 1, 21$, und S. 136: $K_2 = 0, 325 \pm 0, 2$.

⁵Osborne, A.R. & Provenzale, A. (1989) Finite correlation dimension for stochastic systems with power-law spectra, *Physica D* **35**, 357–381.

⁶Theiler, J., Eubank, S., Longtin, A., Galdrikian, B. & Farmer, J.D. [1992] Testing for nonlinearity in time series: The method of surrogate data, *Physica D* **58**, 77–94.

Einbettungsdimensionen⁷.

Für Artefakte in den verschiedenen ε -Bereichen des Plots der Korrelationsintegrale sind zahlreiche Korrekturalgorithmen vorgeschlagen worden. Im Datenanalyseteil werden wir an den Recurrence-Plots für verschiedene ε der Originaldaten und der Surrogate die Effekte sichtbar machen. Insbesondere die **Theilerschulter** (Theiler, 1986)⁸ [22], im Korrelationsplot zu sehen als Wölbung nach oben bei kleinen ε , wird bei den zeitkontinuierlichen Daten deutlich sichtbar als starke Verbreiterung der Hauptdiagonalen. Der Hénon-Attraktor zeigt diesen Effekt überhaupt nicht, da die Autokorrelation auf dem Attraktor verschwindend gering ist.

Wir schließen nun mit zwei Bemerkungen: Nach Osborne & Provenzale (1989) zeigt Rauschen mit einem Fourierspektrum von potenzgesetzmäßiger Skalierung der Frequenz f

$$S(f) = k \cdot f^{-a}$$

im Grassberger-Procaccia-Plot eine ε -Skalierungsregion mit Steigung

$$D_2 = \frac{2}{a-1}$$

für $a \in (1, 3)$. Ansonsten ist keine Skalierung für D_2 zu finden. Dies gibt Anlaß, der Aussage zu mißtrauen, daß eine lineare Skalierungsregion im Grassberger-Procaccia-Plot alleine schon ein Hinweis auf nichtlineare Dynamik ist.

Als zweite Bemerkung sei hier angefügt, daß die Korrelationsdimension nur ein Spezialfall der Rényi-verallgemeinerte Dimensionen ist, die wie folgt definiert sind:

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(\sum_i^{N(\varepsilon)} \mu^q(C_i(\varepsilon)))}{\ln \varepsilon} \right)$$

mit dem Maß des Kubus C_i , also mittels invarianter Dichte

$$\mu(C_i) := \int_{C_i} p^*(\underline{x}) d^E x \quad .$$

Da die Standardbeispiele chaotischer Attraktoren in verschiedenen Regionen des Phasenraumes verschiedene lokale fraktale Dimensionen haben, kann man ein Multifraktalspektrum definieren, was wiederum durch die verallgemeinerten Rényi-Dimensionen darstellbar ist (Halsey *et al.*, 1986)⁹ [23]. Obgleich theoretisch sehr elegant, ist das Multifraktalspektrum bisher nur selten und mit wenig Erfolg auf Realdaten angewandt worden, da es für zu viele Prozesse nicht statistisch diskriminativ ist. Wir gehen deswegen hier nicht tiefer auf andere als die Korrelationsdimension ein.

Nachdem wir gesehen haben, daß lineare Rauschprozesse in bestimmten Maßen qualitativ ähnliche Charakteristika zeigen können wie deterministisch nichtlineare Systeme (z.B. die Skalierung im Grassberger-Procaccia-Plot), müssen wir versuchen, statistisch gegen solche linearen Rauschprozesse als Nullhypothese zu testen. Wir werden dies im nun folgenden Abschnitt tun.

⁷Pincus, S. (1995) [38] Approximate Entropy (ApEn) as a complexity measure, *Chaos* 5, 110–117.

⁸Theiler, J. (1986) Spurious dimension from correlation algorithms applied to limited time-series data, *Phys. Rev. A* 34, 2427–32.

⁹Halsey, T.C., Jensen, M.H., Kadanov, L.P., Procaccia, I., & Shraiman, B.I. (1986) Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets, *Phys. Rev. A* 33, 1141–51. Reprint in Cvitanović (1989), S. 540 ff..

Kapitel 4

Abgrenzung gegen triviale Rauschprozesse, Surrogatmethode

4.1 Poisson-Prozesse und lineare Dynamik mit Gaußschem Rauschen

Als triviale Rauschprozesse bezeichne ich solche mit minimaler extrahierbarer Information, d.h. mit wenigen Parametern und bekannter dynamischer Struktur. Hier sind zwei Klassen solcher Prozesse von besonderer Bedeutung, da sie auf sehr einfachen Annahmen basieren und daher auch von wenigen Parametern abhängen. Wegen ihrer Einfachheit sind sie analytisch gut verstanden und dienen immer wieder als Nullhypothesen, gegen die eine eventuell nichtlineare Dynamik abzugrenzen ist. Im Anwendungsteil werden wir unsere Daten explizit gegen diese Nullhypothesen testen.

Das sind zunächst Poisson-Prozesse, also solche, für die ein Ereignis im Zeitintervall Δt mit Wahrscheinlichkeit p eintritt (bzw. mit $(1 - p)$ nicht eintritt), unabhängig von der Zeit t , zu der in Δt beobachtet wird. Zur Einführung in die Theorie der Poissonprozesse siehe Anhang A und van Kampen (1990)¹ [136], Honerkamp (1992)² [135]. Wir werden im Weiteren häufig das grundlegende Ergebnis benutzen, daß die Verteilung der Zeitintervalle x_n zwischen zwei Ereignissen einfach eine Exponentialverteilung ist:

$$p(x_n) = a \cdot e^{-a \cdot x_n} \quad (4.1)$$

mit $a = p/\Delta t$ der Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis pro Zeit. Dabei sollte natürlich $\Delta t \rightarrow 0$ auch von der experimentellen Auflösung her so klein sein, daß die Wahrscheinlichkeit für zwei Ereignisse pro Δt um Größenordnungen kleiner ist als die für ein Ereignis. Solche Poisson-Prozesse bilden die Nullhypothese klassisch für atomare Zerfälle und dann auch die hier im Weiteren betrachteten Interspike-Intervall-Zeitreihen biologischer neuronaler Systeme.

Die zweite Klasse von trivialen Rauschprozessen sind periodische Prozesse mit additivem Gaußschem Rauschen, technisch gesprochen lineare **AutoRegressive**

¹van Kampen, N.G. (1992). *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (North-Holland, Amsterdam, rev. and enl. edition).

²Honerkamp, J. (1990) *Stochastische Dynamische Systeme* (VCH Verlag, Weinheim).

Moving Average-Modelle (ARMA)

$$x_{n+1} = \sum_{\nu=1}^p a_{\nu} x_{n+1-\nu} + \sigma_{\varepsilon} \varepsilon_n + \sum_{\mu=1}^q b_{\mu} \varepsilon_{n-\mu} \quad , \quad (4.2)$$

auch als ARMA(p, q)-Prozesse bezeichnet. Das Rauschen ε_n ist für alle Zeiten n Gaußisch verteilt

$$p(\varepsilon_n) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\varepsilon_n - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{mit } \mu = 0 \text{ und } \sigma^2 = 1 \quad (4.3)$$

also identisch (*identically distributed*, id.) und stochastisch unabhängig (*independent identically distributed*, iid.)

$$p(\varepsilon_n, \varepsilon_{n-\mu}) = p(\varepsilon_n) \cdot p(\varepsilon_{n-\mu}) \quad (4.4)$$

für alle μ . Die Notationen der ARMA-Prozesse unterscheiden sich etwas zwischen den Lehrbüchern zur klassischen statistischen Zeitreihenanalyse (Schlittgen-Steitberg, 1995 [148], Tong, 1990³ [153]) und den Lehrbüchern zu stochastischen dynamischen Systemen (Lasota & Mackey, 1990 [129], van Kampen, 1990 [136], Honerkamp, 1992 [135]) in der Benennung der Zeitindizes, wie auch in der Hinzunahme der Varianz des Rauschens in die Dynamik, bzw. in die Koeffizienten b_{μ} , oder in die Verteilung der ε_n . Wir lehnen die Notation an die Einbettungsrauminterpretation der vorangegangenen Abschnitte an und schließen auch die Parameter soweit möglich direkt in die Dynamik ein.

Diese linearen Gaußprozesse bilden die Nullhypothese für die meisten statistischen Tests im Bereich der klassischen Zeitreihenanalyse. Varianten, die z.B. Trendbereinigung im Modell explizit berücksichtigen, sind in unseren Anwendungen irrelevant.

Während die Trivialität der Poisson-Prozesse darin besteht, daß die Ereigniswahrscheinlichkeit p konstant für alle Zeiten ist, sind die linearen Gaußprozesse trivial im folgende Sinn: Periodische Bahnen haben bei geeigneter Wahl des Poincaré-Schnittes einen Durchstoßpunkt, was dem Fixpunkt des zeitdiskreten linearen Modells entspricht, plus vieler weiterer Freiheitsgrade, die im wesentlichen unkorreliert sind. Unkorrelierte kleine Störungen summieren sich nach dem zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu einer Gaußverteilung auf und tauchen in der Dynamik der wesentlichen Freiheitsgrade nur noch als additiver Rauschterm ε_n auf.

Die Poisson-Prozesse werden durch einen Parameter a , die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Ereignisses, charakterisiert. Das Gaußsche Rauschen ist durch Mittelwert μ und Varianz σ^2 vollständig beschrieben (wobei der Mittelwert in unserer Beschreibung gleich wieder herausgerechnet ist), so wie bei linearen Dynamiken zusätzlich durch die Autokorrelationen.

Im Anhang B werden wir das einfachste lineare stochastische Modell des AR(1)-Prozesses explizit vorführen. Dort wird aus dem Perron-Frobenius-Operator die stochastische Dynamik hergeleitet, die stationäre Verteilung berechnet, sowie die Autokorrelation aus der Verbundwahrscheinlichkeit in der stationären Verteilung, schließlich der Begriff der Verteilungsreversibilität der Gauß-Modelle geklärt.

Die Beschreibung dieses stochastischen Prozesses erfolgt explizit, um die Analogie der Beschreibung deterministischer chaotischer Dynamik mit der Terminologie der Stochastik (eben aus einer Perron-Frobenius-Gleichung der Dynamik) explizit am Beispiel der Ulam-Abbildung zu zeigen. Aus der Beschreibung des zeitdiskreten AR(1)-Modells mit der Perron-Frobenius-Gleichung für die Dynamik der

³Tong, H. (1990) *Non-linear Time Series, A Dynamical Systems Approach* (Clarendon Press, Oxford).

Verteilungsfunktion folgen die klassischen dynamischen Gleichungen der statistischen Physik, die Mastergleichung und die Fokker-Planck-Gleichung, (hier gleich in Stratonowich-Formulierung) in einfacher Weise (siehe Anhang D). Aus diesen Ausführungen wird deutlich, welche Annahmen bei der Anwendung der Gleichungen eingehen und welche gelockert werden müssen bei der Betrachtung deterministisch chaotischer Systeme. Verallgemeinerungen auf AR(p)-Prozesse, ARMA(p,q)-Prozesse und auch multivariate ARMA-Prozesse sind dann aus unserer Zustandsrauminterpretation leicht zu verstehen.

Wir werden nun den Zusammenhang des Fourierspektrums mit den linearen Gaußprozessen darstellen, um die Erzeugung von Surrogatdatensätzen für die Nullhypothese auf lineare Gaußprozesse aus der Phasenrandomisierung in der Fouriertransformation zu verstehen.

4.2 Yule-Walker-Gleichungen

Der erste Schritt auf dem Weg zum Fourierspektrum linearer Gaußprozesse sind die Yule-Walker-Gleichungen, die einen Zusammenhang zwischen den aus Daten geschätzten AR-Koeffizienten und der Autokorrelationsfunktion aufzeigen. Die Kenntnis der Koeffizienten der linearen Dynamik ist also äquivalent mit der Kenntnis der Autokorrelationsfunktion. Den zweiten Schritt bildet die Äquivalenz von Autokorrelationsfunktion und dem Fourierspektrum nach dem Theorem von Wiener und Khintchin.

Also besteht über die beiden Brücken der Yule-Walker-Gleichungen und des Wiener-Khintchin-Theorems eine Äquivalenz zwischen autoregressiven Koeffizienten und dem Fourierspektrum, wobei die Fourierphasen völlig unberührt bleiben. Dies bildet die Grundlage der Surrogatdatenerzeugung per Phasenrandomisierung in der Fouriertransformation.

Die Yule-Walker-Gleichungen als Anpassung einer linearen Dynamik an vorgegebene Datenpunkte können wir in völliger Analogie zur Darstellung der Anpassung lokal linearer Abbildungen bei den Vorhersagemethoden in Abschnitt 3.1 herleiten. Ziel ist nun, die Koeffizienten a_ν als Funktionen von Schätzern der Autokorrelationsfunktion der Daten auszudrücken.

Sei die eindimensionale Zeitreihe $(x_n)_{n=1}^N$ gegeben. Wir suchen die Darstellung der Daten als AR(E)-Modell, in dem E wieder die "Einbettungsdimension" ist, und x_i die zum Zeitschritt i zur Approximation herangezogenen Punkte der Zeitreihe sind. Es ist also

$$x_{i+1} = \sum_{\nu=0}^{E-1} a_\nu x_{i-\nu} + \sigma_\varepsilon \varepsilon_i \quad (4.5)$$

für $i = E, E + 1, \dots, N$. Also

$$x_{i+1} = (a_0, \dots, a_{E-1}) \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i-1} \\ \vdots \\ x_{i-(E-1)} \end{pmatrix} + \sigma_\varepsilon \varepsilon_i \quad (4.6)$$

mit dem Koeffizientenvektor $\underline{a} = (a_0, \dots, a_{E-1})^{tr}$ und dem Zustandsvektor $\underline{x}_i(t) = (x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-(E-1)})^{tr}$ in Analogie zu einem Einbettungsvektor. Also ist

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \underbrace{\underline{a}^{tr} \cdot \underline{x}_i}_{= \underline{x}_i^{tr} \cdot \underline{a}} + \sigma_\varepsilon \varepsilon_i \\ &= \underline{x}_i^{tr} \cdot \underline{a} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Für $i = E, \dots, N$ Datenpunkte bei Anpassung einer jetzt nicht mehr lokal sondern global linearen Abbildung ist also in Analogie zu Gleichung 3.16 im Fall der Farmer-Sidorowich-Prediktoren im Abschnitt 3.1 (mit $p = N$ im Übergang von lokaler zu globaler Approximation)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_E \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix}}_{=\underline{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_{E-1} & x_{E-2} & \dots & x_1 \\ \cdot & & \dots & x_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{N-1} & \vdots & & x_{N-E+1} \end{pmatrix}}_{=:S} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{E-1} \end{pmatrix}}_{=\underline{a}} + \sigma_\varepsilon \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{E-1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{N-1} \end{pmatrix}}_{=\underline{r}} \quad (4.8)$$

und somit

$$\underline{y} = S \cdot \underline{a} + \underline{r} \quad (4.9)$$

S ist eine $((N - E + 1) \times (E - 1))$ -Matrix. Nun sind die Koeffizienten \underline{a} so zu bestimmen, daß die Residuen $\underline{r} := \sigma_\varepsilon \cdot (\varepsilon_{E-1}, \dots, \varepsilon_{N-1})^{tr}$ klein werden⁴, also wieder als Least-Squares-Problem

$$\chi^2 = \|\underline{r}\|_{N-E}^2 \stackrel{!}{=} \min \quad (4.10)$$

Dies führt mit Gleichung 4.9 auf

$$\chi^2 = \|\underline{y} - S \cdot \underline{a}\|_{N-E}^2 \stackrel{!}{=} \min, \quad \frac{d\chi^2}{d\underline{a}} = 0, \quad (4.11)$$

und daraus zu

$$S^{tr} S \cdot \underline{a} = S^{tr} \underline{y} \quad (4.12)$$

⁴Die Bezeichnung "Residuen" stammt in diesem Zusammenhang aus der statistischen Literatur, die nicht erklärten Reste nach Parameterfitten des Modells (nicht zu verwechseln mit den Residuen der Funktionentheorie).

Es ist also das Gleichungssystem 4.12 zu lösen durch

$$\underline{a} = S^+ \underline{y} = (S^{tr} S)^{-1} \cdot S^{tr} \underline{y} \quad (4.13)$$

wobei die zweite Identität nur bei Invertierbarkeit von $S^{tr} S$ gilt.

Hier ist $S^{tr} S$ eine symmetrische $((E-1) \times (E-1))$ -Matrix mit

$$\begin{aligned} S^{tr} S &= \begin{pmatrix} x_{E-1} & x_E & \dots & x_{N-1} \\ x_{E-2} & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1 & \dots & x_{N-E+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{E-1} & x_{E-2} & \dots & x_1 \\ \cdot & & \dots & x_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{N-1} & \dots & x_{N-E+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=E-1}^{N-1} x_i^2 & \sum_{i=E-1}^{N-1} x_i x_{i-1} & \dots & \sum_{i=E-1}^{N-1} x_i x_{i-(E-2)} \\ & \sum_{i=E-2}^{N-2} x_i^2 & \dots & \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & h_{E-1,E-1} \end{pmatrix} \\ &=: \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1,E-1} \\ h_{12} & h_{22} & \dots & \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & h_{E-1,E-1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.14)$$

mit

$$h_{ij} := \sum_{\nu=E-i}^{N-i} x_\nu x_{\nu-(j-i-1)} = N \cdot C(\tau)$$

dem Schätzer der Autokorrelationsfunktion $C(\tau)$ mit $\tau := j-i$ als der Verzögerung in der Autokorrelation. Also ist $S^{tr} S$ die Kovarianzmatrix von S . Weiter ist

$$S^{tr} \underline{y} = \begin{pmatrix} x_{E-1} & x_E & \dots & x_{N-1} \\ x_{E-2} & & & \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1 & \dots & x_{N-E+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_E \\ x_{E+1} \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

d.h.

$$S^{tr} \underline{y} = \begin{pmatrix} \sum_{i=E}^N x_i x_{i-1} \\ \sum_{i=E}^N x_i x_{i-2} \\ \vdots \\ \sum_{i=E}^N x_i x_{i-(E-1)} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

wieder ausschließlich mit den Schätzern der Autokorrelationsfunktion $C(\tau)$. Das Gleichungssystem 4.12 $S^{tr} S \cdot \underline{a} = S^{tr} \underline{y}$ wird auch als **Yule-Walker-Gleichungen** bezeichnet.

Also sind die autoregressiven Koeffizienten

$$\underline{a} = (S^{tr} S)^{-1} \cdot S^{tr} \underline{y} \quad (4.17)$$

vollständig bestimmt aus Schätzern der Autokorrelationsfunktion der Meßwerte $(x_n)_{n=1}^N$:

$$C(\tau) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i x_{i-\tau} \quad (4.18)$$

bei Annahme der periodischen Fortsetzung der Zeitreihe, d.h. $x_i = x_{i+N}$. Da die Autokorrelationsfunktion $C(\tau)$ über das im nächsten Abschnitt gezeigte Wiener-Khintchin-Theorem mit dem Fourierspektrum $S(f)$ zusammenhängt, sind also die autoregressiven Koeffizienten auch aus dem Fourierspektrum vollständig bestimmt.

Die Verallgemeinerung auf höherdimensionale AR-Prozesse

$$\underline{x}_{i+1} = A X_i + \underline{\varepsilon} \quad (4.19)$$

ist sofort gegeben durch Gleichung 3.16, woraus auch die ARMA-Beschreibung folgt (siehe Schlittgen & Streitberg, 1995 [148]).

Es folgt eine Bemerkung zum Vergleich der Methoden der linearen und der nichtlinearen Zeitreihenanalyse:

Wir haben mit der Ableitung der Yule-Walker-Gleichungen als Approximation einer global linearen Abbildung in Analogie zur Approximation der lokal linearen Abbildungen in den Vorhersagealgorithmen gezeigt, daß man eine gerade Linie in der Analyse von vorliegenden Meßzeitreihen ziehen kann zwischen den Beschreibungen als Zusammensetzung lokal linearer Abbildungen zu einer eventuell nichtlinearen globalen Beschreibung und einer global linearen Beschreibung mit verrauschten Residuen.

Der Zusammenhang ist einfach die Berücksichtigung der Anzahl der p "Nachbarn" zur Approximation der Abbildung (bei linearen autoregressiven Modellen sind es alle N Punkte), der Unterschied in der Interpretation der Residuen als globales, also eventuell mit sehr großer Amplitude behaftetes Rauschen bzw. lokale Störung durch Nichtlinearität und eventuell lokal begrenztes Rauschen in der Nachbarschaft von Testpunkten des Attraktors.⁵

Wir zeigen nun noch, daß die Least-Squares-Approximation, die auf die Yule-Walker-Gleichungen führt, aus einem **Maximum-Likelihood-Prinzip** für das **unabhängige Gaußsche Rauschen** in den Residuen folgt. Wenn man also ein autoregressives Modell an seine Daten per Fehlerquadratminimierung anpaßt, so geht implizit die Hypothese ein, daß die Residuen unabhängig Gaußisch verteilt sind.

Betrachten wir also wieder die Gleichung 4.10, von der aus wir bei der Herleitung der Yule-Walker-Gleichungen gestartet waren

$$\chi^2 = \| \underline{r} \|_{N-E}^2 \stackrel{!}{=} \min$$

für die Residuen $\underline{r} := \sigma_\epsilon \cdot (\epsilon_{E-1}, \dots, \epsilon_{N-1})^{tr}$, die Gaußisch

$$p(\epsilon_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon_n^2}$$

und zeitlich stochastisch unabhängig

$$p(\epsilon_n, \epsilon_{n-\mu}) = p(\epsilon_n) \cdot p(\epsilon_{n-\mu}) \quad \text{für alle } \mu$$

verteilt seien (vergleiche Gleichungen 4.3 und 4.4). Mit

$$\ln(p(\epsilon_n)) = \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\epsilon_n^2} \right) = -\frac{1}{2}\epsilon_n^2 - \ln \left((2\pi)^{\frac{1}{2}} \right)$$

⁵siehe auch Martin Casdagli (1992) [32] Chaos and Deterministic versus Stochastic Non-linear Modelling, *J. Royal Statistical Society*, London, Series B (Methodological), 54, No. 2, 303-328.

d.h. $\varepsilon_n^2 = -2 \ln(p(\varepsilon_n)) - \ln(2\pi)$ folgt

$$\begin{aligned}
 \min \stackrel{!}{=} \chi^2 &= \| \underline{x} \|^2 \\
 &= \sigma^2 \sum_{n=1}^N \varepsilon_n^2 \\
 &= \sigma^2 \sum_{n=1}^N (-2 \ln(p(\varepsilon_n)) - \ln(2\pi)) \\
 &= -2\sigma^2 \left(\sum_{n=1}^N \ln(p(\varepsilon_n)) \right) - N\sigma^2 \ln(2\pi) \\
 &= -2\sigma^2 \ln \left(\prod_{n=1}^N p(\varepsilon_n) \right) - N\sigma^2 \ln(2\pi) .
 \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung der stochastischen Unabhängigkeit der einzelnen Rauschbeiträge ε_n , wenn also die Verbundwahrscheinlichkeit

$$p(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N) = \prod_{n=1}^N p(\varepsilon_n) \quad (4.20)$$

gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten ist, so gilt ein **Minimum-Minus-Log-Likelihood-Prinzip**. Insgesamt erhalten wir also das **Maximum-Log-Likelihood-Prinzip**

$$\text{Max} \stackrel{!}{=} -\chi^2 = 2\sigma^2 \ln(p(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)) + N\sigma^2 \ln(2\pi) . \quad (4.21)$$

oder die äquivalenten Aussagen, siehe Gl. 4.11, für die Extremalisierung nach den gesuchten Parametern (hier der Parametervektor der autoregressiven Koeffizienten \underline{a}):

$$\frac{d\chi^2}{d\underline{a}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{d\underline{a}} p(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N) = 0 . \quad (4.22)$$

In dieser Formulierung ist der Vergleich mit dem Maximum-Log-Likelihood-Prinzip, das in Anhang A benutzt wird zur Schätzung des Parameters eines unabhängigen Poisson-Prozesses aus einer gegebenen Datenreihe, einfach durchzuführen.

4.3 Fourieranalyse, Wiener-Khintchin-Theorem

Ziel der Fourieranalyse ist die Zerlegung einer gegebenen Zeitreihe $x(t)$, in eine Summe von speziellen Basisfunktionen, den Kreisfunktionen $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$, wobei über die Kreisfrequenzen $\omega = 2\pi f$, mit f der Frequenz, summiert wird. Wir zeigen hier zunächst die zeitkontinuierliche Version der Fourieranalyse:

$$x(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega . \quad (4.23)$$

$\hat{x}(\omega)$ ist die Fouriertransformierte der Zeitreihe $x(t)$, und $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \cdot \sin(\omega t)$ liefert die Kreisfunktionen in komplexer Darstellung. Zur Einführung in die Fourieranalyse siehe z.B. Brigham (1994)⁶ [150]. Andere Basisfunktionen werden in letzter

⁶Brigham, E.O. (1974) *The Fast Fourier Transform* (Prentice-Hall).

Zeit verstärkt benutzt, um weitere Informationen aus Zeitreihen zu extrahieren. So liefern zeitlich lokalisierte Basisfunktionen, wie etwa Haar-Wavelets (Combes *et al.*, 1989)⁷ [159], zusätzlich zu den Anteilen der Frequenzen über die gesamte Zeitreihe hinweg Informationen über Stationarität bzw. das zeitlich lokale Auftreten vorherrschender Frequenzen.

Die $\hat{x}(\omega)$ als gesuchte Entwicklungskoeffizienten der Summe der Basisfunktionen ergeben sich aus der inversen Transformation

$$\hat{x}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \quad , \quad (4.24)$$

was durch Einsetzen zu verifizieren ist:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \hat{x}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \int \left(\frac{1}{2\pi} \int x(t') e^{-i\omega t'} dt' \right) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \int dt' x(t') \int \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} d\omega \\ &= \int x(t') \cdot \delta(t-t') dt' \\ &= x(t) \quad . \end{aligned}$$

Hierbei ist $\delta(t-t') = \int \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} d\omega$ die Diracsche Deltafunktion. Dank der komplexen Darstellung sind auch die $\hat{x}(\omega)$ komplexe Zahlen. Die Stärke der jeweiligen Frequenzen $f = \frac{\omega}{2\pi}$ wird durch die Spektraldichte $S(f) := |\hat{x}(2\pi f)|^2$ graphisch darstellbar.

In der praktischen Anwendung wird die diskrete Darstellung der Zeitreihe als Meßpunkte x_j für $j = 1, \dots, N$ zu diskreten Zeitschritten t_j benutzt. Hier liefert die diskrete Fourieranalyse als Transformierte

$$\hat{x}_f = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j \cdot e^{-2\pi i \frac{j}{N} f} \quad (4.25)$$

für $f = 1, \dots, N$. Dies ergibt wieder die Darstellung der Zeitreihe als

$$x_j = \sum_{f=1}^N \hat{x}_f \cdot e^{2\pi i \frac{j}{N} f} \quad . \quad (4.26)$$

Natürlich ist im Komplexen zu rechnen mit $\hat{x}_f = \Re(\hat{x}_f) + i \cdot \Im(\hat{x}_f)$ und $e^{2\pi i \frac{j}{N} f} = \cos(2\pi \frac{j}{N} f) + i \sin(2\pi \frac{j}{N} f)$.

Den komplexen Vektor \hat{x}_f kann man nun in Polarkoordinaten darstellen als Betrag und Winkel in der komplexen Zahlenebene. Das Betragsquadrat bezeichnet man als Spektraldichte oder Fourierspektrum $S(f)$ mit

$$\begin{aligned} S(f) &:= |\hat{x}_f|^2 \\ &= (\Re(\hat{x}_f))^2 + (\Im(\hat{x}_f))^2 \\ &= \frac{1}{N^2} \left[\left(\sum_{j=1}^N x_j \cos(2\pi \frac{j}{N} f) \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^N x_j \sin(2\pi \frac{j}{N} f) \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (4.27)$$

⁷Combes, J. M., Grossmann, A., Tchamitchian, P. (1989): *Wavelets, Proceedings of the International Conference, Marseille, France, Dec. 1987* (Springer, Berlin, Heidelberg).

Graphisch wird nur die erste Hälfte des Spektrums $f = 1, \dots, \frac{N}{2}$ aufgetragen, da es sich wegen des endlichen Intervalls (bzw. N endlich) spiegelbildlich in der zweiten Hälfte wiederholt. Den Winkel bezeichnet man als Phase $\varphi(f)$ mit

$$\varphi(f) := \arctan \left(\frac{\Im(\hat{x}_f)}{\Re(\hat{x}_f)} \right) . \quad (4.28)$$

Auch die Phase ist spiegelsymmetrisch um $N/2$.

Die Rücktransformation kann nun ebenfalls wieder aus Betrag $r_f := \sqrt{S(f)}$ und Winkel φ der komplexen Fouriertransformierten

$$\hat{x} = r_f e^{i\varphi(f)}$$

durchgeführt werden. Sie ist also durch

$$x_j = \sum_{f=1}^N \sqrt{S(f)} \cdot e^{(2\pi i \frac{j}{N} f + i\varphi(f))} \quad (4.29)$$

gegeben. Dieser Ausdruck für die Rücktransformation wird später bei der Surrogaterzeugung nach der Phasenrandomisierung auf den Surrogatdatensatz führen, statt zurück auf den Originaldatensatz.

Zur Überprüfung der Normierungen kann die Identität von Parseval herangezogen werden, die besagt, daß die Gesamtstärke der Zeitreihe nach der Fouriertransformation erhalten bleibt:

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |x_j|^2 = \sum_{f=1}^N |\hat{x}_f|^2 ,$$

wobei die rechte Seite der Gleichung die Aufsummierung der Spektraldichte $S(f) := |\hat{x}_f|^2$ ist.

Schließlich betrachten wir noch die zeitliche Autokorrelationsfunktion

$$C(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot x(t - \tau) dt$$

die über daß Theorem von Wiener und Khintchin mit der Spektraldichte $S(f)$ zusammenhängt. Mit $\Gamma(f) := \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) \cdot \cos(\omega\tau) d\tau$ und $\omega = 2\pi f$ ist

$$\Gamma(f) = S(f) \quad (4.30)$$

das Wiener-Khintchin-Theorem.

Im diskreten Fall ist für $m = 0, \dots, N-1$ die Autokorrelation

$$C(m) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j \cdot x_{j-m}$$

mit periodischer Fortsetzung $x_{m-N} = x_m$. Wieder wird nur die erste Hälfte dargestellt. Die diskrete Form des Theorems von Wiener und Khintchin lautet nun

$$\begin{aligned} \Gamma(f) &:= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} C(m) \cdot \cos(2\pi \frac{m}{N} f) \\ &= S(f) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Dasselbe liefert natürlich wegen der periodischen Fortsetzung auch die Summation von $m = 1$ bis N . Wir zeigen hier den Beweis für die zeitdiskrete Version des Wiener-Khintchin-Theorems: Es ist laut Definition

$$\begin{aligned}
 S(f) &= \frac{1}{N^2} \left(\sum_{j=1}^N x_j \cos(2\pi \frac{j}{N} f) \right)^2 + \frac{1}{N^2} \left(\sum_{j=1}^N x_j \sin(2\pi \frac{j}{N} f) \right)^2 \\
 &= \frac{1}{N^2} \left(\sum_{j=1}^N x_j \cos(2\pi \frac{j}{N} f) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^N x_i \cos(2\pi \frac{i}{N} f) \right) \\
 &\quad + \frac{1}{N^2} \left(\sum_{j=1}^N x_j \sin(2\pi \frac{j}{N} f) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^N x_i \sin(2\pi \frac{i}{N} f) \right) \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N x_i x_j \cdot (\cos(2\pi \frac{i}{N} f) \cos(2\pi \frac{j}{N} f) + \sin(2\pi \frac{i}{N} f) \sin(2\pi \frac{j}{N} f)) \\
 &= \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N x_i x_j \cdot \cos(2\pi \frac{f}{N} (i - j))
 \end{aligned}$$

mit dem Additionstheorem $\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y = \cos(x - y)$. Setzen wir nun $m := i - j = m(j)$, d.h. $j = i - m(j)$, so erhalten wir

$$S(f) = \frac{1}{N^2} \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N x_i x_{i-m(j)} \cdot \cos(2\pi \frac{f}{N} m(j))$$

und summieren nun über die Haupt- und Nebendiagonalen $m = i - j = \text{const.}$ des Quadrates $(i, j) \in \{1, 2, \dots, N\} \times \{1, 2, \dots, N\}$

$$S(f) = \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{i=m+1}^N x_i x_{i-m} \cdot \cos(2\pi \frac{f}{N} m)$$

unterhalb der Hauptdiagonalen $m = 1, \dots, N - 1$,

$$+ \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot \cos(0)$$

mit $m = 0$, d.h. entlang der Hauptdiagonalen,

und $\nu := N + m$ für $m = -(N - 1), \dots, -1$ oberhalb der Hauptdiagonalen:

$$+ \frac{1}{N^2} \sum_{\nu=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{\nu} x_i x_{i-(\nu-N)} \cdot \cos(2\pi \frac{f}{N} \nu - 2\pi f)$$

mit $x_{i-(\nu-N)} = x_{i-\nu+N} = x_{i-\nu}$, da die Meßreihe periodisch fortgesetzt wird, und $\cos(2\pi \frac{f}{N} \nu - 2\pi f) = \cos(2\pi \frac{f}{N} \nu)$, da $f \in \mathbb{N}$,

also können wir im ersten und dritten Term die Summen über i zusammenschieben:

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{i=m+1}^N x_i x_{i-m} \cdot \cos(2\pi \frac{f}{N} m) \\ &\quad + \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot \cos(0) \\ &\quad + \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{i=1}^m x_i x_{i-m} \cdot \cos(2\pi \frac{f}{N} m) \end{aligned}$$

mit Wiederumbenennung der Variablen $m := \nu$,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i x_{i-m} \right) \cdot \cos(2\pi \frac{f}{N} m) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} C(m) \cdot \cos(2\pi \frac{f}{N} m) \\ &= \Gamma(f) \quad . \end{aligned}$$

In den drei einzelnen Summen ist der mittlere Term

$$\frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N x_i^2 \cdot \cos(0) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N x_i x_{i+N} \cdot \cos(2\pi \frac{f}{N} N) \quad ,$$

also statt für $m = 0$ auch $m = N$ möglich in der Summe $\sum_{m=0}^{N-1}$, dann $\sum_{m=1}^N$. Also ist schließlich das Theorem von Wiener und Khintchin als Zusammenhang zwischen Autokorrelationsfunktion $C(m)$ und Fourierpektrum $S(f)$ bewiesen:

$$S(f) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} C(m) \cdot \cos(2\pi \frac{f}{N} m) \quad . \quad (4.32)$$

Wir haben hier gesehen, daß das Wiener-Khintchin-Theorem in der diskreten Form für N Meßpunkte exakt gilt unter den in die Rechnung eingegangenen Annahmen. Analog zu Fouriertransformation und -rücktransformation gibt es auch eine Darstellung der Autokorrelation als Funktion des Spektrums, also die Umkehrung von Gleichung 4.32.

Damit ist der direkte Weg von den autoregressiven Koeffizienten über die Autokorrelation zum Fourierpektrum aufgezeigt. Die Fourierphasen sind hier bei reellem Meßsignal vollständig unberührt. Wir werden diese Tatsache im nun folgenden Abschnitt zur Erzeugung von phasenrandomisierten Surrogatdaten benutzen.

4.4 Phasenrandomisierung zur Erzeugung von ARMA-Surrogaten

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, daß durch Fouriertransformation und Fourierrücktransformation wieder das ursprüngliche Meßsignal erhalten wird. Andererseits hängt die Autokorrelationsfunktion, die allein die autoregressiven Koeffizienten bestimmt, nur vom Fourierspektrum $S(f)$ ab, nicht von der Phase $\varphi(f)$.

Um viele Datenreihen mit gleichen autoregressiven Koeffizienten wie eine gegebene Meßreihe (Originaldatensatz), sonst aber zufällig, zu erzeugen, braucht man nur die Phasen $\varphi(f)$ nach erfolgter Fourierzerlegung der Originaldaten zwischen $-\pi$ und π zu randomisieren und die Fourierrücktransformation durchzuführen. Wir zeigen hier den Effekt dieser **Phasenrandomisierung zur Erzeugung von ARMA-Surrogaten** an der x -Zeitreihe des Zweineuronenmoduls (siehe Abbildung 4.1). Die Phasenrandomisierung erhält die Autokorrelation, wie aus Abbildung 4.1 a) und b) zu sehen ist. Die Verteilung der Surrogatdaten ist allerdings durch die Aufsummation der Randomphasen nach dem "zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung" eine Gaußverteilung geworden. Die Verteilung der Originaldaten dagegen zeigt die fraktale Struktur des seltsamen Attraktors.

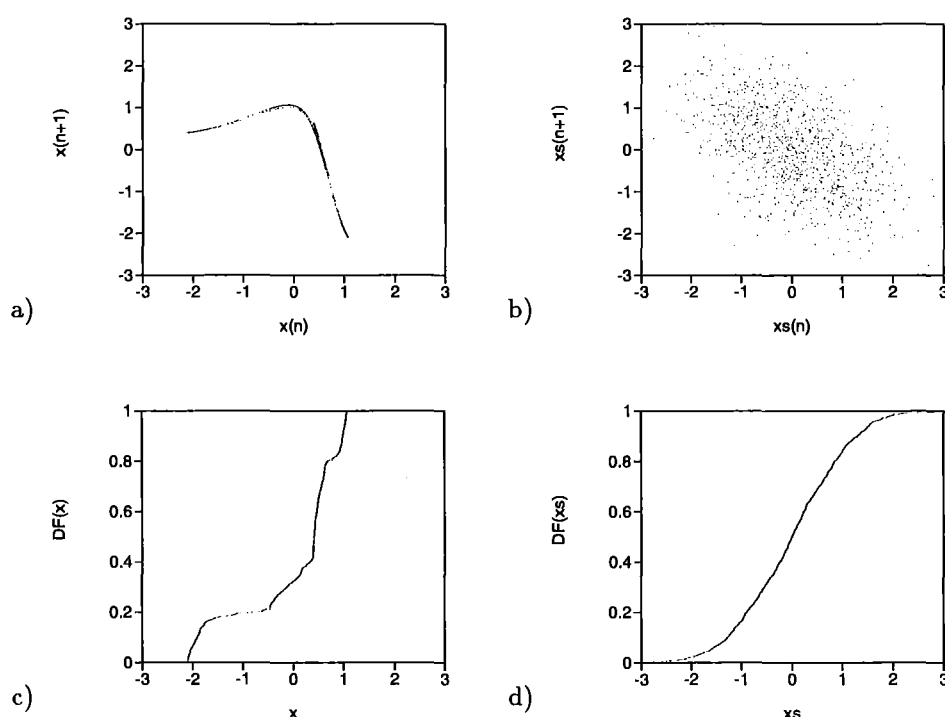


Abbildung 4.1: Phasensurrogatisierung der x_n -Zeitreihe des 2-Neuronenmoduls. In a) ist die Einbettung der Zeitreihe selbst zu sehen. Deren Verteilung (c)) zeigt die typischen Stufen fraktaler Mengen. Die Surrogatzeitreihe xs_n zeigt in der Einbettung einige Ähnlichkeit in der Autokorrelation mit dem ursprünglichen Attraktor: die Hauptachse der Punktwolke (b)) liegt in derselben Richtung wie die meisten Punkte des Attraktors in a). Weitere Struktur ist in der Punktwolke nicht zu erkennen. Die Verteilungsfunktion (d)) zeigt dann auch genau die Form einer Gaußverteilungsfunktion.

Die *return plots* in Abbildung 4.1 a) und b) sind als graphische Repräsentation der Verbundwahrscheinlichkeit $p(x_{n+1}, x_n)$ zu interpretieren. Das Vertauschen der

Achsen x_n und x_{n+1} führt zur Zeitumkehr der Verbundwahrscheinlichkeit, d.h. zu $p(x_n, x_{n+1})$ oder $p(x_{n-1}, x_n)$. Während die Realisierung eines ARMA-Prozesses in der Spiegelung um die Hauptachse im Return-Plot zu keiner Änderung führt (Abbildung 4.1 b)), d.h.

$$p(x_{n+1}, x_n) \approx p(x_n, x_{n+1}) \quad ,$$

zeigt dieselbe Prozedur im Fall des Attraktors einer nichtlinearen Dynamik (Abbildung 4.1 a)) ein ganz anderes Bild, also hier

$$p(x_{n+1}, x_n) \neq p(x_n, x_{n+1}) \quad .$$

Für das AR(1)-Modell zeigen wir in Anhang B die Zeitreversibilität der Verbundwahrscheinlichkeit, die charakteristisch für lineare Gaußprozesse ist. Sie wird inzwischen neben Vorhersagbarkeitstests und ε -Skalierung in Grassberger-Procaccia-Plots als ein weiterer Test auf dynamische Nichtlinearitäten benutzt (Diks *et al.*, 1995⁸ [39], van der Heijden *et al.*, 1996 [49]).

Wir kommen nun auf das Problem der Gaußianisierung der Surrogatverteilung in der Phasenrandomisierung zurück. Bei stark von einer Gaußverteilung abweichenden Originaldatensatzverteilungen können hier starke Fehler bei den anschließend durchgeführten Tests auf dynamische Nichtlinearitäten auftreten. Abhilfe schaffen hier die Gaußskalierte Surrogate und weitergehende Verbesserungen, die wir im folgenden Abschnitt besprechen werden.

4.5 Gaußskalierte Surrogate, Spektrenkorrektur

Nullhypothese sei nun ein allgemeiner ARMA-Prozeß mit statischer nichtlinearer Transformation Φ , die nicht die linearen Korrelationen ändert, wohl aber die Verteilung der Daten. Diese Transformation der Verteilung könnte zu Artefakten bei der Messung von nichtlinearen Kenngrößen führen (Rapp *et al.* 1994⁹) [34].

Wir wollen also versuchen, beim Erzeugen der Surrogatdaten nicht nur das Spektrum (und damit die ARMA-Hypothese) beizubehalten, sondern auch die Verteilung der Daten, also eventuelle statische Verzerrungen der Verteilung berücksichtigen. Dazu dient die Methode der Gaußskalierten Surrogate¹⁰.

Wir zeigen die Methode an Hand eines Beispieldatensatzes aus dem Datenteil. Es handelt sich um einen Interspike-Intervall-Datensatz, dessen Verteilungsfunktion eher einer Exponentialverteilung, wie sie charakteristisch ist für einen Poisson-Prozeß, als einer Gaußverteilung ähnelt. Doch auch von einer Exponentialverteilung hat der Datensatz einige Abweichungen, so daß aus der Verteilung noch keine Rückschlüsse auf irgendeinen zugrundeliegenden Prozeß gezogen werden können. Vorhersagbarkeit ist für solche ISI-Datensätze in der Literatur in den letzten Jahren häufiger untersucht worden, wobei die hier angegebene Methode der Gaußskalierten Surrogate als statistische Evaluierung herangezogen wird.

Zunächst muß man den vorgegebenen Datensatz normieren auf Mittelwert Null und Varianz Eins (siehe 4.2 a)). Es ergibt sich die in Abbildung 4.2 b) angegebene Verteilungsfunktion, die stark von einer Gaußverteilung abweicht. Die Fourierzerlegung liefert das Fourierspektrum 4.2 c) und daraus die Autokorrelationsfunktion

⁸Diks, C., van Houwelingen, J.C., Takens, F. & DeGoede, J. [1995] "Reversibility as a criterion for discriminating time series," *Phys. Lett. A* **201**, 221–228.

⁹Rapp, P.E., Albano, A.M., Zimmerman, I.D. & Jiménez-Montaña (1994). Phase-randomized surrogates can produce spurious identifications of non-random structure. *Phys. Lett. A* **192**, 27–33. Unkorrelierte Poissonprozesse können bei rein phasenrandomisierten Surrogaten Nichtlinearitäten vortäuschen. Als Beispiel wird der atomare Zerfall von Co64 als perfektem Poissonprozeß benutzt.

¹⁰nach einer Randbemerkung in Theiler *et al.*, 1992 [33].

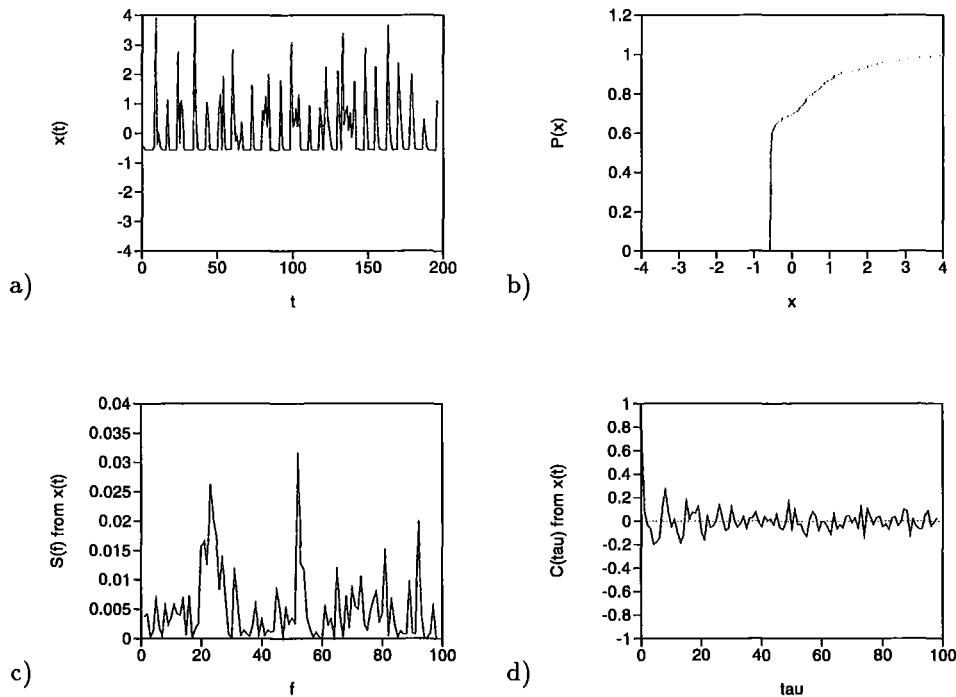


Abbildung 4.2: Ein Datensatz der Interspike-Intervall-Meßreihen (*imm4*, für Erläuterungen siehe Datenteil), normiert auf Mittelwert Null und Varianz Eins. In a) ist die Originalzeitreihe zu sehen, b) gibt deren Verteilungsfunktion $P(x)$, c) das Fourierspektrum und d) die Autokorrelation $C(\tau)$ wieder.

4.2 d). Aus der Originalzeitreihe $x(t)$ ergibt sich bei Anwendung des Tests auf Vorhersagbarkeit eine leichte Kurzzeitvorhersagbarkeit bis zum Vorhersagehorizont $h = 7$ (Abbildung 4.3 b)). Auch dies ist in der Literatur in ähnlicher Weise gefunden worden (Schiff *et al.*, 1994(a))¹¹ [56].

Zur Konstruktion der Gaußskalierten Surrogate speichern wir die Verteilungsfunktion $P(x)$ der Originaldaten in einer indizierten Liste. Nun erzeugen wir einen Gaußverteilten Datensatz y von gleicher Anzahl der Datenpunkte wie die des Originaldatensatzes. In Abbildung 4.4 a) ist ein solcher Datensatz als Verteilungsfunktion $P(y)$ im Vergleich mit der Verteilungsfunktion der Gaußnormalverteilung dargestellt. Wir vergleichen nun $P(y)$ mit der indizierte Liste $P(x)$ der Originalzeitreihe $x(t)$ und ordnen die y in der Reihenfolge nach den $x(t)$, so daß wir die Zeitreihe $y(t)$ mit Gaußverteilung und Reihenfolge der Originaldaten erhalten (Abbildung 4.4 b)). Dies ist nun der Startdatensatz $y(t)$ für eine Phasenrandomisierung des normalen Surrogatverfahrens.

Die Hypothese dahinter ist: $y(t)$ sei eine Realisierung eines ARMA-Prozesses, auf die anschließend eine statische monotone (aber nicht notwendig eine lineare) Transformation $\Phi(y(t))$ etwa durch einen Meßprozeß wirkt:

$$x(t) = \Phi(y(t)) \quad (4.33)$$

Erst die so transformierte Zeitreihe $x(t)$ liegt zur Analyse für einen Nichtlinearitätstest vor. Wir haben im ersten Schritt also durch die Gauß-Skalierung der Ausgangsdaten die Umkehrtransformation Φ^{-1} konstruiert.

¹¹ Schiff, S.J., Jerger, K., Chang, T., Sauer, & Aitken, P.G. (1994,a) Stochastic versus deterministic variability in simple neuronal circuits: II Hippocampal slices, *Biophysical J.* 67, 684–691.

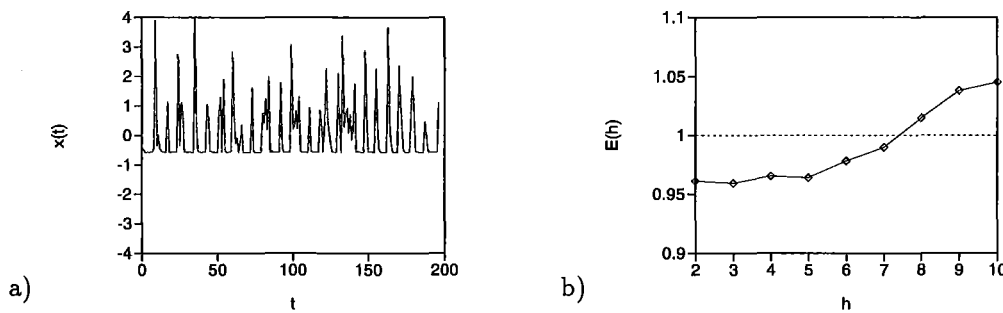


Abbildung 4.3: Vorhersagbarkeit b) des Originaldatensatzes a). Eine leichte Kurzzeitvorhersagbarkeit ist bis zum Vorhersagehorizont von etwa 7 Schritten in die Zukunft möglich (b)). Bei der Vorhersage sind die Parameter Einbettungsdimension $E = 3$ und Anzahl nächster Nachbarn zur lokalen Vorhersage $nn = 8$.

Die nun anschließende Phasenrandomisierung erhält die Gaußverteilung der Daten y und ändert nur noch die eventuell bestehenden Nichtlinearitäten in der Dynamik selbst. Da das Spektrum im Schritt der Phasenrandomisierung der Konstruktion erhalten bleibt, ändert sich die Autokorrelation ebenfalls nicht. Das Ergebnis $y_{sur}(t)$ dieses Schrittes ist in Abbildung 4.5 gezeigt.

Im abschließenden Schritt muß nun die Verteilung wieder in die ursprüngliche der Originaldaten gebracht werden. Dazu haben wir die Verteilungsfunktion $P(x)$ der Originaldaten gespeichert und vergleichen diese mit einer indizierten Liste der Gaußischen Surrogate $y_{sur}(t)$, also $P(y_{sur})$. Die Werte x werden der Reihenfolge nach den $y_{sur}(t)$ zugeordnet, so daß sich die Zeitreihe $x_{gs}(t)$ der Gaußskalierten Surrogate mit der Originalverteilung der Ausgangsdaten bei Phasensurrogatisierung von Gaußischen auf Gaußische Datensätze ergibt.

Das Ergebnis dieser Gaußskalierten Surrogatisierung (Abbildung 4.7 a)) ist eine Zeitreihe $x_{gs}(t)$, die der Ausgangszeitreihe verblüffend ähnlich sieht, viel ähnlicher als jede rein phasenrandomisierte Zeitreihe (da die Gaußianisierung der Verteilung zu Ergebnissen wie etwa in Abbildung 4.4 b) führen würde), oder auch einer anderen Alternative, nämlich der Randomisierung der Reihenfolge der Zeitreihe, was jede Autokorrelation zerstören würde.

Trotz dieser optischen Ähnlichkeit von $x_{gs}(t)$ mit $x(t)$ selbst ist es ein echter Surrogatsatz insofern also die Vorhersagbarkeit (Abbildung 4.7 b)) vollständig verloren geht im Vergleich zu der des Originaldatensatzes $x(t)$. Alle Vorhersagefehler liegen nun über Eins. Die dynamischen Nichtlinearitäten in der Zeitreihe sind durch diese Surrogatisierung vollständig verloren gegangen.

Bleibt zu beachten, daß der Datensatz $x_{gs}(t)$ nur eine einzelne Realisierung der Nullhypothese eines linearen verrauschten Prozesses mit statischer nichtlinearer Transformation ist. Ein ganzes Ensemble ist zu berechnen und die Differenz zwischen Maßen für den Originaldatensatz und denen auf einem ganzen Ensemble zu betrachten. Dies wird im Datenteil explizit durchgeführt werden.

Wir haben die Erzeugung der Gaußskalierten Surrogate so ausführlich dargestellt, weil sich hier ein fundamentales Problem auftut: Zur Anpassung des Foursierspektrums an einen Datensatz mit N Datenpunkten werden $N/2$ Koeffizienten $S(f)$ festgelegt. Die andere Hälfte steckt in den Phasen; man beachte noch, daß das Spektrum spiegelsymmetrisch um $f = N/2$ ist. Zur Anpassung einer beliebigen Verteilungsfunktion $P(x)$ an die der Gaußverteilung legen wir aber weitere $N-2$ Ko-

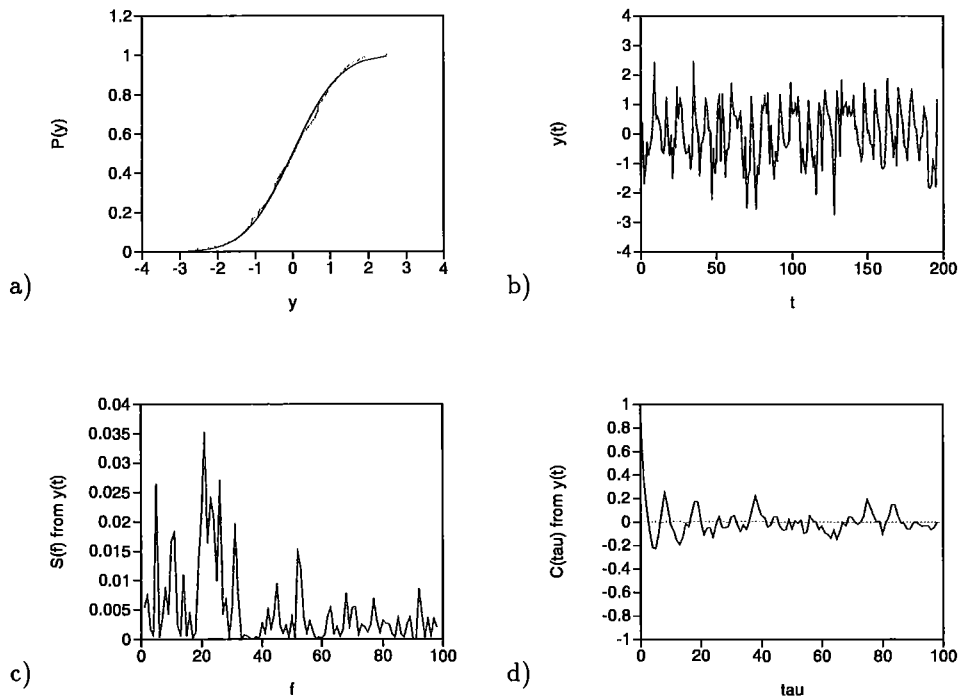


Abbildung 4.4: Aus einer Gaußverteilten Variablen y (siehe in a) die Verteilungsfunktion von y im Vergleich mit der theoretischen Gaußverteilungsfunktion) wird eine Gaußskalierte Zeitreihe $y(t)$ durch Ordnen der y in der Reihenfolge der Zeitreihe $x(t)$ erzeugt (b)). Spektrum und Autokorrelation von $y(t)$ sind in c) und d) zu sehen.

effizienten fest. Durch die Normierung der Ausgangsdaten zu Mittelwert Null und Varianz Eins stimmen Gaußverteilung und empirische Verteilung per Konstruktion in diesen zwei Parametern schon überein. Wir fordern also die Festlegung von weit mehr Parametern, als Daten zur Verfügung stehen. Ein solches Problem kann im Allgemeinen nur durch eine Approximation, nicht aber durch Interpolation (wie stillschweigend im obigen Verfahren angenommen wird) erreicht werden.

Dieses Problem zeigt sich in den Daten darin, daß das Spektrum aus der Forderung der exakten Anpassung ausbricht, und zwar schon im ersten Schritt der Verteilungsanpassung, d.h. vom Übergang von $x(t)$ zu $y(t)$ durch die Transformation Φ^{-1} . Vergleiche die Spektren in Abbildungen 4.2 c) und 4.4 c). Nach der Phasenrandomisierung, durch einen Operator P_{rand} zu bezeichnen, ändert die Transformation Φ das Spektrum von $y(t)$ bzw. $y_{sur}(t)$ wieder in Richtung des ursprünglichen. Vergleiche die Spektren in Abbildungen 4.4 c) und 4.7 c), insbesondere deutlich beim Peak um $f \approx 50$, der wieder deutlich angehoben wird. Aber eine vollständige Korrektur der Änderungen im Schritt Φ^{-1} kann nach dem Schritt P_{rand} von Φ nicht mehr erreicht werden. Bei Φ^{-1} und direkter Anwendung von Φ würde sich per Konstruktion der ursprüngliche Datensatz ergeben, also auch das Spektrum (bis auf kleinste Änderungen durch die stochastische Abweichung von der Gaußverteilungsfunktion) sich nicht ändern. Insofern ist die Bezeichnung Φ^{-1} als Umkehrfunktion der Transformation Φ gerechtfertigt. Technisch gesprochen: Die Operatoren statische Transformation Φ und Phasenrandomisierung P_{rand} kommutieren nicht (Schreiber & Schmitz 1996)¹² [40]. Würden sie kommutieren, wäre

¹²Schreiber, T. & Schmitz, A. (1996) Improved Surrogate Data for Nonlinearity Tests, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 635-638.

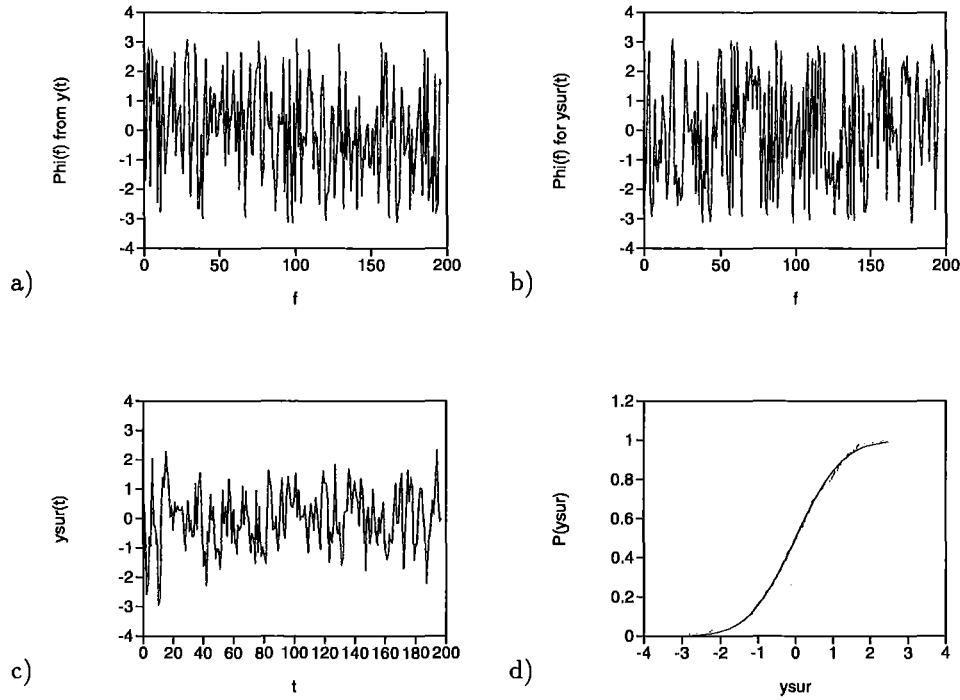


Abbildung 4.5: Phasenrandomisierung der Gaußskalierten Zeitreihe $y(t)$ liefert wieder eine Gauß-verteilte Zeitreihe $y_{sur}(t)$, wie in Zeitreihe c) und Verteilungsfunktion d) erkennbar ist. In a) sind die Originalphasen, in b) die randomisierten Phasen zu sehen. Man erkennt die Antisymmetrie in den Phasen um $N/2$ herum, die auch in der randomisierten Version erhalten sein muß, um nichtimaginäre Signale nach der Fourier-Rücktransformation zu erhalten.

die gesamte Gauß-Skalierung überflüssig! Das Problem der zu vielen Bedingungen an Koeffizienten für eine gegebene Datenmenge verhindert letztlich die Interpolation.

Hieraus wird klar, daß eine Approximation nötig ist, um Spektrum und Verteilung soweit möglich zu erhalten, aber auch die Phasen weiterhin ungeordnet zu belassen. Schreiber & Schmitz (1996) [40] schlagen ein iteratives Verfahren zur Approximation des Spektrums (Polishing) bei exakter Beibehaltung der Verteilung vor.

Definieren wir den Abstand zwischen Originalspektrum $S_{orig}(f)$ und dem Spektrum der Surrogate $S_{sur}(f)$ durch

$$d_{spect} := \frac{\sum_{f=1}^N (S_{orig}(f) - S_{sur}(f))^2}{\sum_{f=1}^N S_{orig}^2(f)} \quad , \quad (4.34)$$

so ist der Abstand in unserem Beispiel ($S_{orig}(f)$ in Abbildung 4.2 c) und $S_{gs}(f)$ in 4.7 c))

$$d_{spect} = 0,687$$

für den Gaußskalierten-Surrogate-Algorithmus. Etwa für 20 Polishingschritte nach Schreiber & Schmitz (1996) [40] erreicht man

$$d_{spect} = 0,219 \quad ,$$

wobei wir allerdings schon mit Gauß-skalierten Surrogaten in der Iteration gestartet sind, nicht mit Randomsequenzen wie Schreiber & Schmitz. Deshalb fallen die Unterschiede nicht ganz so dramatisch aus.

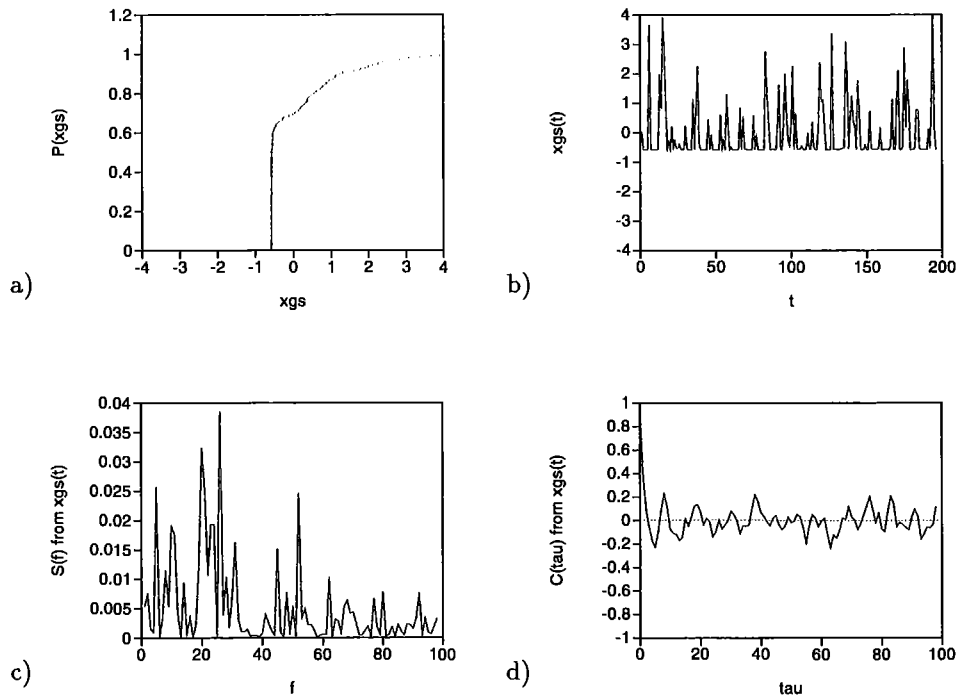


Abbildung 4.6: Aus der Originalverteilung (Verteilungsfunktion von x_{gs} in Abbildung a) ist gleich der von x) mit Reihenfolge der Gaußverteilten Zeitreihe $y_{sur}(t)$ ergibt sich die endgültige Surrogatzeitreihe $x_{gs}(t)$ in b). Fourierspektrum und Autokorrelation sind in c) und d) zu sehen.

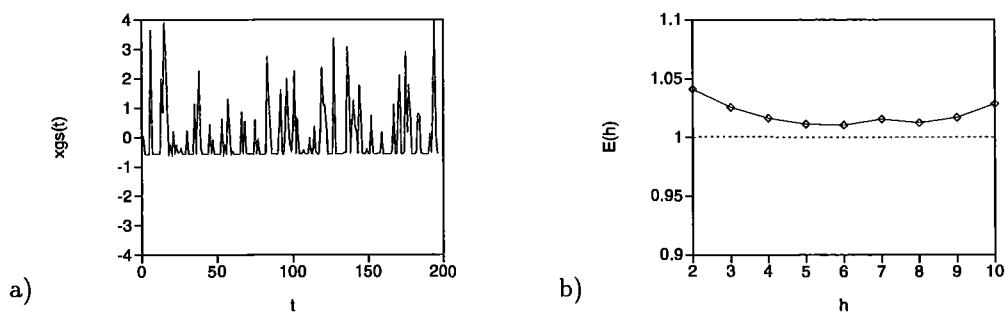


Abbildung 4.7: Vorhersagbarkeit des Gaußskalierten Surrogatdatensatzes $x_{gs}(t)$. Die Zeitreihe a) selbst ist qualitativ nicht mehr von der Originaldaten $x(t)$ zu unterscheiden. Dagegen ist der Unterschied in der Vorhersagbarkeit b) offensichtlich. Die aus den Originaldaten noch erkennbare Kurzzeitvorhersagbarkeit ist hier in der Vorhersagbarkeit der einzelnen Realisierung des Gaußskalierten Surrogatdatensatzes vollständig verschwunden.

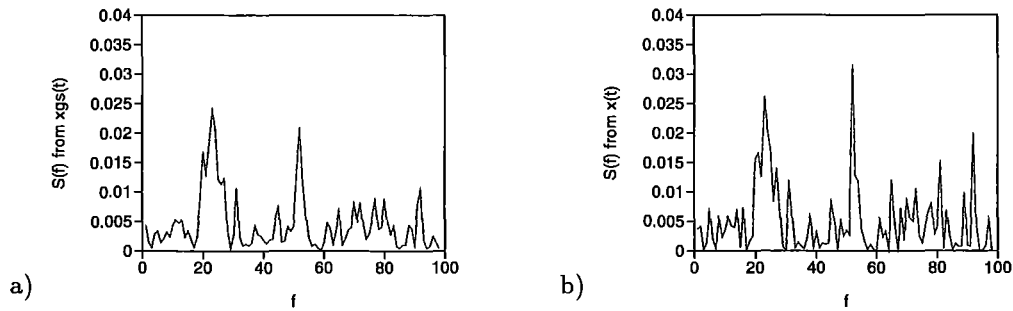


Abbildung 4.8: Vergleich eines polierten Surrogatspektrums a) mit dem Originalspektrum b).

Polishing ist ein iteratives Verfahren, in dem in jedem Schritt mit einem Wienerfilter das Surrogatspektrum immer wieder an das Originalspektrum angepaßt wird und die Originalverteilung, genau wie bei den Gaußskalierten Surrogaten, beibehalten wird. Die Phasen werden nur einmal zu Beginn des Verfahrens randomisiert. Man fragt sich also, wodurch die Verbesserung im Spektrum erreicht wird, wenn schon die Verteilung vollständig festgehalten wird. In dieser Verbesserung wird wohl ein Teil der Information aus den Originaldaten in die nur am Anfang der Iteration randomisierten Phasen zurückgedrückt. Bei vollständiger Rekonstruktion der Phasen würde nämlich wieder eine Vertauschbarkeit der Operatoren P_{rand} und Φ erreicht, da aus P_{rand} die Identität würde (Fouriertransformation und Rücktransformation), wodurch auch Φ^{-1} und Φ sich zur Identität ergäben. Allerdings sind Ordnungen in der Phase schwer zu detektieren (siehe Abbildungen 4.5 a) und b)).

Stattdessen könnte man versuchen, sowohl das Spektrum als auch die Verteilung gut zu approximieren und nicht entweder Verteilung exakt festzuhalten und Spektrum schlecht zu approximieren oder umgekehrt, jeweils bei garantiert zufälligen Phasen. Bisher sind nur erste Versuche in diese Richtung gemacht worden (N. Stollenwerk & F. Drepper, unveröffentlicht).

Wir wollen nun die praktische Anwendung der Nichtlinearitätstests auf Vorhersagbarkeit und auf ϵ -Skalierung erproben an Beispielen der in der Neurobiologie gegebenen Zeitreihen.

Teil II

Nichtlinearitäten in biologischen Neuronenverbänden

Kapitel 5

Hippocampus, Intrazelluläre Ableitungen.

5.1 Der Hippocampus als Beispielsystem

Die dargestellten Methoden der nichtlinearen Zeitreihenanalyse sind aus der Kenntnis idealer chaotischer Systeme oder in Abgrenzung gegen ideale Rauschprozesse entwickelt worden. Reale Systeme lassen sich oft nur schwer mit diesen idealen Systemen vergleichen. In der Physik gibt es je nach Geschick des Experimentators einstellbare Präparationen, die den idealen theoretischen Systemen sehr nahe kommen. Die Präparation biologischer Systeme, wenn nicht gerade auf biochemischer Ebene, ist viel schwieriger. So haben sich Standardsysteme herausgebildet, die vielfach untersucht werden. Trotzdem widersprechen sich Ergebnisse verschiedener Gruppen oder sogar innerhalb einer Versuchsreihe oft noch.

Um so wichtiger ist es, geeignete Teilsysteme zu finden, die relativ einfach strukturiert sind, experimentell gut zugänglich und möglichst auch noch funktional einigermaßen verständlich. In der Hirnforschung bietet sich ein System, das diesen Anforderungen weitgehend gerecht wird, in der als Hippocampus oder Ammonshorn (*cornu ammonis*, daher die Abkürzung verschiedener Hippocampusregionen als CA) bekannten Struktur des Mittelhirns.

5.1.1 Einfach strukturierter Aufbau

Die meisten Regionen des Gehirns haben einen sehr komplexen Aufbau, so der Neokortex mit seinen durchweg sechs Schichten, oder Zusammenballungen ohne histologisch gut erkennbare und abgrenzbare Struktur, z.B. die zahlreichen Nuklei der Amygdala. Der Hippocampus bildet in beiden Hirnhälften unterhalb des Temporallappens jeweils eine Füllhorn-ähnliche Formation, die sich auf humanen computertomographischen Bildern klar abzeichnet¹.

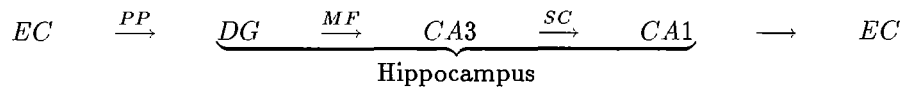
In Tierexperimenten kann der gesamte Hippocampus einer Hirnhälfte leicht herauspräpariert und in Transversalschnitten unter dem Lichtmikroskop betrachtet werden. Schon hier zeigen sich einfach zu unterscheidende Strukturen, die durch Färbung einzelner Zellen (etwa die Golgi-Färbung) klar hervortreten.

Man beschreibt klassisch nach Ramón y Cajal (1911)² [139] einen trisynaptischen Schaltkreis: sensorische Erregung, die aus den Primärsinnen schon hochkon-

¹Zu Darstellungen der verschiedenen Hirnregionen, insbesondere auch des Hippocampus siehe einschlägige Medizinbücher, z.B. Kandel, Schwartz & Jessel (1992) [141] und Shepherd (1990) [140]. Zu allen physiologischen Aspekten des Hippocampus siehe Traub, Miles (1991) [142].

²Santiago Ramón y Cajal (1911) *Histologie du Système Nerveux*, Paris.

densiert ist, wird von dem dem Hippocampus vor- und nachgeschalteten sechslagigen enthorinalen Cortex (EC) über den Tractus perforans (*perforant pathway*, PP), ein Axonenbündel, in den Gyrus dentatus (*dentate gyrus*, DG) geleitet. Ein halbkreisförmiger Ring von Granularzellen, knollenförmige Neuronen, wird durch den PP angesprochen. Von dieser ersten Region des Hippocampus, dem DG, führen Axone, Moosfasern genannt (*mossy fibers*, MF), in eine linienförmig angeordnete Schicht von Pyramidalzellen, pyramidenförmige Neuronen, der Region CA3. CA3 ist Teil einer ganzen linienförmigen Schicht von Pyramidenzellen, die sich um den DG herum wölbt. Histologisch hat man Regionen CA1 bis CA4 definiert, wobei inzwischen klar ist, daß über die größten synaptischen Verbindungen nur CA3 und CA1 funktional zu unterscheiden sind. CA4 ist damit Teil von CA3, CA2 wird meist zu CA1 gezählt. Von CA3 gehen dicke Faserbündel, die Schaffer-Kollateralen (SC)³, zu CA1 und von dort einerseits zurück in den enthorinalen Cortex, andererseits in das Subiculum (Sub), eine Struktur zwischen CA1 und EC. Also ergibt sich die einfache trisynaptische Gliederung:



Dieser trisynaptische Schaltkreis ist in den Transversalschnitten des Hippocampus vollständig erhalten, so daß sich darin zahlreiche Experimente durchführen lassen. Die hier beschriebenen Strukturen des Hippocampus lassen sich sehr gut in einer Zeichnung nach Ramón y Cajal (1904)⁴ [138] verfolgen, siehe Abbildung 5.1.

Zudem sind die Pyramidenzellen relativ große Neuronen in einer klar angeordneten Schicht (gerade in CA1), so daß man schon histologisch eine tiefe dendritische Schicht der Eingänge (*stratum radiatum*, (3) in Abbildung 5.1), die Schicht der Neuronenkörper selbst (*stratum pyramidale*, (2)) und die darüberliegende axonische Schicht der Ausgänge (*stratum oriens*, (1)) unterscheiden kann. Unterhalb der CA1-Dendritenschicht folgt noch eine Schicht starker Zuleitungen (*stratum lacunosum moleculare*, (4) in Abbildung 5.1) und schließlich die nächste Neuronenregion, die Schicht der Granularzellen des Gyrus Dentatus. Diese Schichten können auch in elektrophysiologischen Experimenten beim Setzen von Elektroden einfach unterschieden werden⁵. Dies führt uns schon zum nächsten Abschnitt der durch die einfache Struktur möglichen Experimente am Hippocampus.

Abschließend sei hier noch eine Bemerkung zur einfachen Verschaltungsstruktur des Hippocampus gestattet. Der trisynaptische Kreis dient heute noch als Orientierungshilfe, ist in seiner einfachen Vorwärtsverschaltungsstruktur (*feedforward*) aber grob vereinfachend, wenngleich weiter kommentarlos in Lehrbüchern zu finden. Inzwischen sind exzitatorische Verbindungen zwischen eigentlich allen Regionen des Hippocampus bekannt. Zu einer Zusammenfassung neuerer Ergebnisse siehe Shepherd (1990)⁶ [140]. Histologisch sind einige der über den trisynaptischen Kreis hinausgehenden Verbindungen schon in Abbildung 5.1 zu erkennen, also seit Ramón y Cajal wahrnehmbar. Da erregende Verbindungen leicht durch Einzelreizung von Neuronen zu entdecken sind, haben wir von diesen Verbindungen weit bessere Kenntnisse als von hemmenden Verbindungen. Um so erstaunlicher ist die Tatsache, daß nicht nur lokale Hemmungen von Interneuronen zwischen den exzitatorischen

³Die Schaffer-Kollateralen sind benannt nach K. Schaffer (1892) Beitrag zur Histologie der Ammons Hornformation. *Archiv f. mikros. Anatomie*, Bd. 39, 1. Heft.

⁴Santiago Ramón y Cajal (1904) *Textura del sistema nervioso del hombre y de los vertebrados*, Tomo II, Imprenta Nicolás Moya, Madrid.

⁵Private Mitteilung von Takanori Suzuki, Universität Groningen. Siehe auch Brankač *et al.*, 1993 [62], 1996 [63].

⁶Shepherd, G.M. (1990) *The synaptic organization of the brain*, 3rd ed. (Oxford University Press, New York, Oxford).

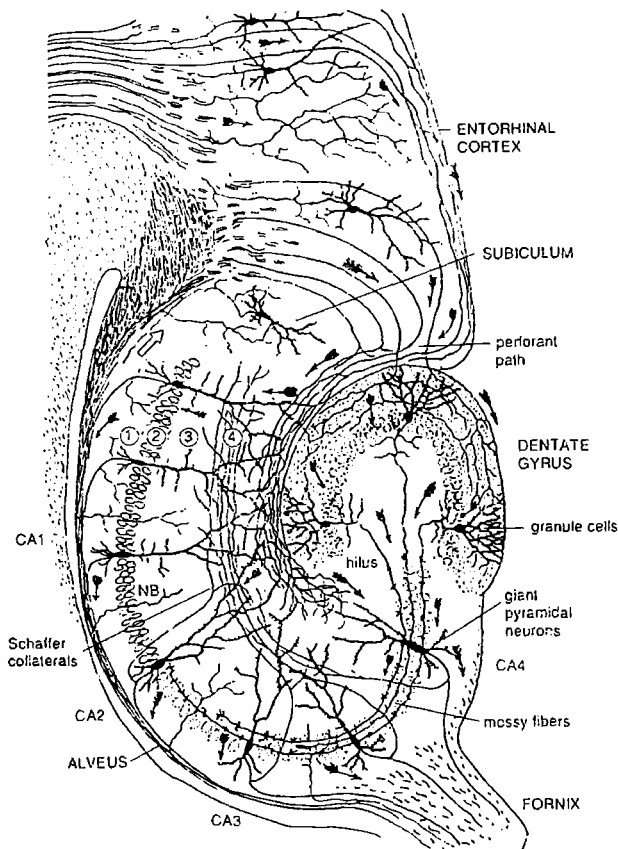


Abbildung 5.1: Der Hippocampus nach einer Zeichnung von Ramón y Cajal. Zur Beschreibung der einzelnen Strukturen siehe Text.

Pyramidenzellen etwa bekannt geworden sind sondern auch langreichweitige Hemmungen von CA1 nach DG. Auch longitudinale, also in den Transversalschnitten nicht erhaltene, langreichweitige Inhibitionen im Gyrus Dentatus wurden gefunden. Diese reichen über die gesamte Länge des Ammonshorns (Shepherd, 1990) [140]. Die starken exzitatorischen Verbindungen innerhalb der CA3-Region geben nicht nur Anlaß zu theoretischen Spekulationen über Attraktornetze mit voller Verschaltungsstruktur (vom Hopfieldtyp, siehe Teil III), sondern ist auch ein wesentlicher Grund für die starke Epilepsieanfälligkeit des gesamten Hippocampus. Dies wird im Kapitel 6 weiter ausgeführt werden.

Insgesamt ist der Hippocampus also ein guter Kandidat, auch rekurrente Strukturen mit langreichweitigen Exzitationen und Inhibitionen zu untersuchen.⁷

5.1.2 Gute experimentelle Zugänglichkeit

Die einfache und dabei relativ großskalige Struktur des Hippocampus macht diesen besonders geeignet für zahlreiche Experimente auf den verschiedenen Ebenen der

⁷Zur starken Konnektivität und Auswirkungen auf die Dynamik der Reizweiterleitung siehe etwa Matsumoto *et al.*, Preprint 1997, [64]; Iijima, T., Witter, M.P., Ichikawa, M., Tominaga, T., Kajiwar, R., & Matsumoto, G. (1997) Entorhinal-Hippocampal Interactions Revealed by Real-Time Imaging, *preprint*.

Hirnforschung. Zunächst läßt sich der Hippocampus leicht isolieren und in Transversalschnitten (*slices*) weiter untersuchen. Die dünnen Schnitte enthalten die wesentlichen Verschaltungsstrukturen zwischen den verschiedenen Regionen. Zudem sind die Zellkörper der Pyramidenzellen des Hippocampus, besonders in CA1, so groß, daß sich leicht elektrophysiologische Experimente durchführen lassen. Es sind sowohl extrazelluläre Ableitungen im Interzellularmedium wie auch intrazelluläre Ableitungen möglich, in denen eine Elektrode in den Zellkörper eingeführt wird. Nach dem Anstich schließt sich die Zellmembran wieder, so daß man das Somapotentiale eines einzelnen Neurons mißt. Ein Nachteil gegenüber extrazellulären Ableitungen besteht darin, daß im Laufe der Messung schnell die Zellmembran zerstört wird, was oft nur kurze Meßzeitreihen zur Folge hat. Extrazelluläre Einzelzellmessungen können dagegen den viel gravierenderen Nachteil haben, daß man oft gar nicht merkt, daß die Elektrode Signale von verschiedenen Neuronen bekommen kann, was selbst bei periodisch feuernden Einzelneuronen zu sehr komplex aussehenden dynamischen Mustern führt⁸. Wir werden weiter unten intrazelluläre Messungen an CA1-Pyramidenzellen in Hippocampusschnitten von Kaninchen untersuchen. Die Epilepsieforschung erfordert pharmakologische Experimente an Hippocampusschnitten. Deswegen sind "Epilepsie-Modelle", also epilepsieauslösende chemische Stoffe, darunter Bicucullin und Picrotoxin⁹, häufig Forschungsgegenstand. In letzter Zeit werden zunehmend dynamische Aspekte der Epilepsiegenerierung und auch der Epilepsiebehandlung an Hippocampusschnitten untersucht.

Neben der Messung von Spontanaktivität der Neuronen können in Schnitten ebenfalls Stimulationen einzelner Axonenbündel durchgeführt werden. So werden die leicht zugänglichen Moosfasern und die Schaffer-Kollateralen stimuliert, um Reaktionen auf einzelne Reize in den nachgeschalteten Neuronen zu untersuchen. Zur Untersuchung von Dynamik sind die periodischen Stimulationen von besonderem Interesse (Hayashi & Ishizuka, 1995¹⁰ [54]), so wie zeitlich gezielte Reize zur Beeinflussung der Dynamik in geschlossenen Schleifen zur Kontrolle (*feedback control*) (Schiff *et al.*, 1994(b)¹¹ [57]).

Neben Experimenten an Schnitten wird ebenso die nächst höhere Ebene der Netzwerkdyamik untersucht. Wegen der einfachen Struktur der Pyramidenzellschicht der CA-Regionen mit unterscheidbaren dendritischen und axonischen Ebenen können in lebenden Tieren Elektroden für Massenzellableitungen sehr spezifisch gesetzt werden. Hier sind ebenfalls die Schaffer-Kollateralen hervorragend geeignet zur Stimulation. Solche Experimente sind in der Epilepsieforschung unumgänglich. Wir werden Meßzeitreihen auch hiervon weiter unten auf ihre Dynamik hin analysieren.

Bisher haben wir Experimente auf der Zellebene oder der Zellverbandebene beschrieben. Die einfache Anordnung der Pyramidenzellen über einen makroskopisch großen Bereich hinweg, nämlich über die gesamte Länge des Ammonshorns, hat bei Erregung neueren Untersuchungen zufolge starke elektrische (und damit auch magnetische) Signale zur Folge. Zunächst sind natürlich die hippocampusgenerierten epileptischen Aktivitäten zu nennen. Nicht nur voll ausgebildete epileptische Anfälle

⁸ Extrazelluläre Ableitungen zur Gewinnung von ISI-Zeitreihen haben Nachteile, die nicht das Erhalten längerer Zeitreihen aufwiegt (wie sich in einer früher von uns durchgeführten Kooperation gezeigt hatte). Die extrazelluläre Elektrode kann zwischen verschiedenen Neuronen hin- und herwandern, was auch bei rein periodisch spontanfeuernden Neuronen zu schönen Mustern führt und Nichtlinearitätstests täuschen kann. Die von uns bearbeiteten Daten stammen von Dr. Sandkühler, Heidelberg (Sandkühler, 1993 [116], Debus & Sandkühler, 1994 [117]).

⁹ Bicucullin und auch Picrotoxin sind sogenannte GABA-Antagonisten. Sie blockieren Rezeptoren für γ -amino-Buttersäure (γ -amino butyric acid, GABA) welches als inhibitorischer Neurotransmitter fungiert.

¹⁰ Hayashi, H. & Ishizuka, S. (1995) Chaotic responses of the hippocampal CA3 region to a mossy fiber stimulation in vitro, *Brain Research*, 686, 194–206.

¹¹ Schiff, S.J., Jerger, K., Doung, D.H., Chang, T., Spano, M.L. & Ditto, W.L. (1994(b)) Controlling chaos in the brain, *Nature* 370, 615–620.

sondern auch überhöhte Aktivität im Hippocampus, die andere Cortexareale nicht direkt beeinflusst, scheint den EEG- und MEG-Messungen direkt zugänglich zu sein. Diese wird interictale Aktivität genannt, also solche zwischen zwei äußerlich sichtbaren Anfällen.

Aber auch normale Aktivität des Hippocampus ist nach Brankač *et al.* (1996)¹² [63] über den gesamten Cortex hinweg wiederzufinden. Sogenannte ϑ -Wellen, die aus Vorzeichenumkehr von Signalen in der CA1-Schicht beim Übergang von axonischen zu dendritischer Schicht leicht zu lokalisieren sind (siehe oben), sind ohne Vorzeichenumkehr in sämtlichen andern Tiefen des Cortex ungeschwächt zu detektieren. Daß diese ϑ -Wellen überdies mit anderen Charakteristika von Neuheitsdetektion, sogenannten P300-Wellen, positivem Ausschlag in EEGs um 300 msec nach relevanten Reizen (zumeist überraschend neuen Ereignissen) in psychophysikalischen Experimenten, verknüpft sind, wird uns im Teil zu den Funktionen des Hippocampus weiter beschäftigen.

Hier soll nun noch auf eine weitere interessante Möglichkeit hingewiesen werden, diese in Tierversuchen gemachten Befunde für die Humanneurologie zu überprüfen. Die erst wenige Jahre alte Technik der monatelang implantierten schmerzfreien intrakraniellen Elektrodennetze bei Patienten mit vermuteten Hippocampusepilepsieherden macht psychophysische Experimente mit gleichzeitiger direkter Messung der Hippocampusaktivität möglich und nützlich zur Eingrenzung von Funktionsstörungen vor operativen Eingriffen¹³. Wir kommen damit zu Hypothesen über die Funktion des Hippocampus im Zusammenspiel der Gehirnregionen.

5.1.3 Funktionale Aspekte

Ausgehend von Läsionsuntersuchungen wird dem Hippocampus seit Langem eine Rolle beim kurzzeitigen Speichern von Situationen zugeschrieben. Kurzzeitspeichern setzt Plastizität der Verbindungsstärken zwischen den Neuronen voraus. Folglich sind am Hippocampus die meisten Experimente zu Langzeitverstärkung bzw. -schwächung synaptischer Verbindungen (*long term potentiation*, *long term depression*) nach Signalübertragung durchgeführt worden. Die Hebb'sche Lernregel ist das klassische Paradigma hierfür. Sie besagt, daß sich synaptische Übertragungsstärken nach der Korrelation zwischen prä- und postsynaptischem Potential ändern.

Nun lassen sich Attraktornetze konstruieren, die per Hebb'schem Lernen Attraktoren aufprägen (siehe Teil III), sogenannte Hopfield-Netze. Ihre Architektur ist klassisch eine voll verknüpfte Struktur (Hopfield, 1982¹⁴ [78], 1984¹⁵ [79]). Der Schluß liegt nahe, in dem hochgradig exzitatorisch rekurrent verknüpften CA3-Netz des Hippocampus solch einen Assoziativspeicher vom Hopfield-Typ zu suchen (Shepherd, 1990 [140], Traub & Miles, 1992¹⁶ [142], Treves & Rolls, 1992¹⁷ [52], 1994¹⁸ [53]).

Es besteht ein Zusammenhang, der zwischen ϑ -Rhythmus und synaptischer Übertragungseffizienz (Lisman, 1997¹⁹ [65]), und dann auch zu Lernen (Bibbig,

¹²Brankač, J., Seidenbecher, T., & M.G. (1996) Task-Relevant Late Positive Component in Rats: Is it Relevant to Hippocampal Theta Rhythm? *Hippocampus* 6.

¹³Informationsquelle: Universitätsklinik Bonn, K. Lehnertz.

¹⁴Hopfield, J.J. (1982) Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 79, 2554–2558.

¹⁵Hopfield, J.J. (1984) Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 81, 3088–3092.

¹⁶Traub, R.D. & Miles, R. (1991) *Neuronal networks of the hippocampus* (Cambridge University Press, Cambridge).

¹⁷Treves, A., & Rolls, E.T. (1992) Computational Constraints Suggest the Need for Two Distinct Input Systems to the Hippocampal CA3 Network, *Hippocampus* 2, 189–200.

¹⁸Treves, A., & Rolls, E.T. (1994) Computational Analysis of the Role of the Hippocampus in Memory, *Hippocampus* 4, 374–391.

¹⁹Lisman, J.E. (1997) Bursts as a unit of neural information: making unreliable synapses reliable,

Wennekers, Palm, 1995²⁰ [66]) hergestellt wird. Der ϑ -Rhythmus ist ein aus unregelmäßigen elektrischen Signalen auftauchender Wellenzug mit einer Frequenz von 4 bis 12 Hertz, oft nur einigen Wellenberge lang, manchmal aber auch stabil über mehrere Sekunden (Buszáki *et al.*, 1985²¹ [67]). Dies scheint ein Frequenzbereich zu sein, in dem die Neuronen des Hippocampus bevorzugt sensibel reagieren. Siehe Kapitel 6 zu Stimulationen in diesem Frequenzbereich.

5.2 Einführung in das Experiment

In diesem Kapitel 5 wird ein Standardsystem als erste Beschreibungsebene biologischer Informationsverarbeitungssysteme untersucht: Intrazelluläre elektrische Ableitungen von CA1-Neuronen in transversalen Hippocampusschnittpräparaten. Von den zeitkontinuierlich gemessenen Spannungszeitreihen wurden Interspike-Intervall-Zeitreihen (ISI) gebildet und elektronisch gespeichert.

Sämtliche in diesem Abschnitt verwendeten ISI-Zeitreihen stammen von Messungen des Physiologischen Instituts der Universität Alicante, Spanien, die Ende 1995 aufgenommen wurden. Prof. J.V. Sánchez-Andrés stellte sie mir Mitte 1996 dankenswerterweise zur Verfügung.

Vielfach wurde in der Literatur behauptet, in solchen ISI-Zeitreihen des Hippocampus Anzeichen für chaotisch deterministisches Verhalten zu finden. Wegen der hohen rekurrenten Verknüpfungsstruktur des Hippocampus (e.g. Shepherd, 1990 [140], Treves & Rolls, 1992 [52]), ist der Hippocampus häufiger Entstehungsort von Temporallappenepilepsien. Die Arbeitshypothese vieler Experimentatoren ist nun: Epilepsie sollte sich durch starke Änderung der Aktivitätsdynamik des Hippocampus bemerkbar machen. Läßt sich diese Änderung der Dynamik klassifizieren, eventuell in Kategorien periodischer oder niedrigdimensionaler chaotischer Bewegung? Ist eventuell Vorhersage oder zumindest Kurzzeitvorhersage von epileptischen Ausbrüchen möglich? Ist gar durch gezielte Eingriffe in die Dynamik während eines epileptischen Ereignisses der Gesamtverlauf des Anfalls zu mildern (Schiff *et al.*, 1994(b) [57])?

Die spezielle Fragestellung der Arbeitsgruppe Sánchez-Andrés ist: Gibt es in der Entwicklung des Individuums Änderungen des qualitativen Verhaltens des Hippocampusnetzwerkes, die bei epilepsiegefährdeten Individuen abnormal verläuft. In diesem Zusammenhang wurden ISI-Zeitreihen von unreifen (*immature*), reifen (*mature*) und chemisch inhibitionsblockierten Präparaten (*bicuculline*) in Spontanaktivität untersucht. Die Versuchstiere waren Kaninchen.

Resultat unserer Untersuchung ist, daß Zeitreihen von Präparaten unreifer Tiere und Bicucullin-behandelter Präparate reifer Tiere in ihren Verteilungen Poissonprozesse mit zusätzlichen Bursts, also 5-8 Spikes in kurzer Folge, sind, während diejenigen der unbehandelten Präparate reifer Tiere periodisches Verhalten mit zusätzlich Gaußschem Rauschen zeigen.

Eine der derzeitigen biophysikalischen Literatur (e.g. Chang *et al.*, 1994²² [55]) folgende Studie zur Vorhersagbarkeit als Test auf nichtlineare Dynamik ergab in einem Fall eine von Surrogaten unterscheidbare Kurzzeitvorhersagbarkeit, die mit

Trends in Neurosciences 20, 38-43.

²⁰Bibbig, A., Wennekers, T., & Palm, G. (1995) A neural network model of the cortico-hippocampal interplay and the representation of contexts, *Behavioural Brain Research*, 66, 169-175.

²¹Buszáki, G., Rappelsberger, P., & Kellényi (1985) Depth Profiles of Hippocampal Rhythmic Slow Activity ('Theta Rhythm') Depend on Behaviour, *Electroencephalography and clinical Neurophysiology* 61, 77-88.

²²Chang, T., Schiff, S.J., Sauer, T., Gossard, J.P. & Burke, R.E. (1994) "Stochastic versus deterministic variability in simple neuronal circuits: I Monosynaptic spinal cord reflexes," *Biophysical J.* 67, 671-683.

den Ergebnissen in Chang *et al.*, 1994, [55] vergleichbar ist. Eine genauere Analyse der Verteilungsfunktion des ISI-Datensatzes legte aber die Hypothese nahe, daß diese Kurzzeitvorhersagbarkeit auf die Bursts in dem ansonsten Poissonischen Prozeß zurückzuführen ist. Diese Hypothese hat sich bestätigt, indem die Bursts zu einzelnen Spikes korrigiert wurden (ein Burst aus 5-8 Spikes wurde zu einem einzelnen Spike zusammengefügt), was auch die Kurzzeitvorhersagbarkeit in diesem burstkorrigierten Datensatz verschwinden ließ. Schließlich besteht nun noch die Möglichkeit, daß Information in den Abfolgen der Bursts statt der Einzelspikes steckt. Für einen Vorhersagetest ist die so erhaltene Interburst-Intervall-Zeitreihe (IBI) zu kurz. Ein Test auf exponentielle Verteilungsfunktion (wie für Poissonprozesse charakteristisch) der IBI-Zeitreihe ist positiv. Also ist auch dort mit weitergehendem Determinismus nicht zu rechnen. Für eine abschließende Antwort müßten allerdings längere Abschnitte von Bursts intrazellulär gemessen werden. Dies war mit der im Labor vorhandenen Apparatur allerdings nicht möglich.

Im folgenden wird der Poissonprozeß und die Verteilungsfunktion der Inter-Event-Intervalle, hier speziell Spikes als Events, charakterisiert. Als statistischer Test der Daten auf die Nullhypothese des Poissonprozesses oder des periodischen Gauß-Prozesses wird der Kolmogorov-Smirnov-Test (KS-Test) beschrieben und auf die vorliegenden Datensätze angewendet (siehe Anhang A). Die Stärken diese KS-Tests, insbesondere die graphische Auswertung der Verteilungsfunktion, gegenüber klassisch verwendeten Tests auf die Verteilung selbst sind in der Einleitung (Kapitel 1) aufgeführt. Die Ergebnisse des Nichtlinearitätstests auf die ursprünglich positive ISI-Zeitreihe werden mit denen der burstkorrigierten Datensätzen verglichen.

5.3 Interspike-Intervalle spontaner Aktivität in CA1

Im Experiment wurden intrazelluläre Ableitungen von Spontanaktivität in 500 μm dünnen Hippocampus-Schnitten von weißen Neuseelandkaninchen in der CA1-Region (im *stratum pyramidale*) durchgeführt. Die mehrstündige Präparation der Schnitte ist recht aufwendig, da auch nach der Herauslösung des Hippocampus aus dem decapitierten Tier das Gewebe in seiner vollen Funktion erhalten bleiben soll. Zu einer genauen Beschreibung der einzelnen Präparationsschritte siehe Menéndez de la Prida, Bolea & Sánchez-Andrés (1996)²³ [60]. Von der aufgenommenen Spannungszeitreihe wurden die Interspike-Intervalle (ISI) bestimmt, d.h. die Länge der Zeit x_i zwischen zwei Spikes i und $(i + 1)$.

Da sowohl die Präparation der Schnitte als auch der Meßprozeß selbst sehr schwierig sind, stehen oft nur wenige und zudem kurze Zeitreihen zur Verfügung. Insgesamt wurden 5 ISI-Zeitreihen von bis höchstens 7 Tage alten Jungtieren erhalten (Datensätze *imm1* bis *imm5*, Bezeichnung nach *immature*), des weiteren 4 ISI-Zeitreihen von ausgewachsenen Tieren (Datensätze *mat1* bis *mat5*, Bezeichnung nach *mature*) und schließlich 2 ISI-Zeitreihen von ausgewachsenen Tieren, wobei die Schnitte anschließend mit dem Inhibitionsblocker Bicucullin behandelt wurden (Datensätze *bicu1* und *bicu2*).

Wir werden die verschiedenen Phänomene der Verteilungen und Dynamiken zunächst an ausgewählten Datensätzen beschreiben und daraus quantitative Maße der Charakterisierung ableiten. Im Abschnitt 5.5 werden schließlich die Analyseergebnisse aller Datensätze angegeben und diskutiert.

Zu einer ersten Begutachtung der ISI-Zeitreihen und ihres statistischen Verhaltens siehe Abbildung 5.2 mit einer typischen Zeitreihe für die unreifen CA1-

²³Menéndez de la Prida, L., Bolea, S. & Sánchez-Andrés, J.V. (1996). Analytical characterization of spontaneous activity evolution during hippocampal development in the rabbit. *Neurosci. Lett.* 218, 1-3.

Pyramidenzellen (Datensatz *imm2*). In Abbildung 5.3 sieht man zum Vergleich eine typische Zeitreihe für die ausgereiften CA1-Pyramidenzellen (Datensatz *mat2*). In a) ist die Zeitreihe selbst dargestellt, also die ISI x_i mit Zeitindex i . Der Vergleich zeigt zwar, daß die Datensätze unterschiedliche Varianzen haben, d.h. in *imm2* längere und kürzere Intervalle auftraten als in *mat2*, sonst aber keine qualitativen Unterschiede. Die ISI-Wiederkehrabbildung jeweils in b) zeigt dagegen starke qualitative Unterschiede der Verbundverteilungen $p(x_i, x_{i+1})$. Wir schließen daraus, daß auch die einfachen Verteilungen $p(x_i)$ verschieden sein sollten, und tragen folglich den Schätzer der Verteilungsfunktionen $P(x_e) := \int_{-\infty}^{x_e} p(x_i) dx_i$ auf, die observierte Verteilungsfunktion (*observed distribution function*, ODF), siehe jeweils Abbildung c). Diese ODF kommen Verteilungsfunktionen elementarer stochastischer Prozesse schon sehr nahe, allerdings verschiedenen für *imm2* und *mat2*. Für *imm2* ist der Poisson-Prozeß eine gute Nullhypothese, für *mat2* der Gauß-Prozeß. Wir werden diese nun im einzelnen beschreiben.

5.3.1 Hypothesen: Poisson- und Gauß-Prozesse

Der einfachste stochastische Prozeß, der in Interereignis-Intervall-Zeitreihen auftreten kann, ist der Poisson-Prozeß. Die Grundannahme lautet wie folgt: In einem Zeitintervall Δt ist die Wahrscheinlichkeit p , ein Ereignis zu beobachten, konstant für alle Intervalle und unabhängig von der Vorgeschichte, speziell unabhängig von der Tatsache, ob zuvor ein Ereignis stattgefunden hat oder nicht. Dann ist die Verteilung der Interereigniszeit, hier der Interspike-Intervalle, gegeben durch die Pascal-Verteilung, auch bekannt als geometrische Verteilung:

$$\tilde{p}(\phi) = p \cdot (1-p)^{\phi-1} \quad , \quad (5.1)$$

d.h. $(\phi-1)$ -mal kein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)$ in aufeinanderfolgenden Zeitintervallen Δt und schließlich ein Erfolg mit Wahrscheinlichkeit p im letzten, dem ϕ -ten Intervall. Für $\Delta t \rightarrow 0$ und $x := \phi \cdot \Delta t$, aber konstanter Wahrscheinlichkeit pro Zeit $a := p/\Delta t$ konvergiert die Pascal-Verteilung zu einer Exponentialverteilung des Poisson-Prozesses mit Wahrscheinlichkeitsdichte (siehe für die Herleitung Anhang A)

$$p_P(x) = a \cdot e^{-a \cdot x} \quad . \quad (5.2)$$

Für diesen stochastischen Prozeß ist die Anzahl k der Ereignisse in einem vordefinierten größeren Zeitintervall $\Delta T = \mu \cdot \Delta t$ verteilt mit

$$p_\mu(k) = \binom{\mu}{k} p^k (1-p)^{\mu-k} \quad , \quad \binom{\mu}{k} := \frac{\mu!}{k!(\mu-k)!} \quad , \quad (5.3)$$

welches die Binomialverteilung ist mit der zusätzlich gegebenen Definition des Binomialkoeffizienten μ über k .

Wenn der Mittelwert $\lambda := \langle k \rangle = \mu \cdot p$ im Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ konstant gehalten wird, so erhalten wir aus der Binomialverteilung die sogenannte Poisson-Verteilung

$$p_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad , \quad (5.4)$$

die dem hier betrachteten stochastischen Prozeß seinen Namen gibt. In der physikalischen Literatur wird der Poisson-Prozeß auch häufig als Schrottrauschen (*shot noise*) bezeichnet.

Der nächst einfache stochastische Prozeß mit nun zwei Parametern, Mittelwert \bar{x} und Standardabweichung σ , ist der unabhängige Gauß-Prozeß mit der Gaußverteilung für die ISIs x

$$p_G(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \quad . \quad (5.5)$$

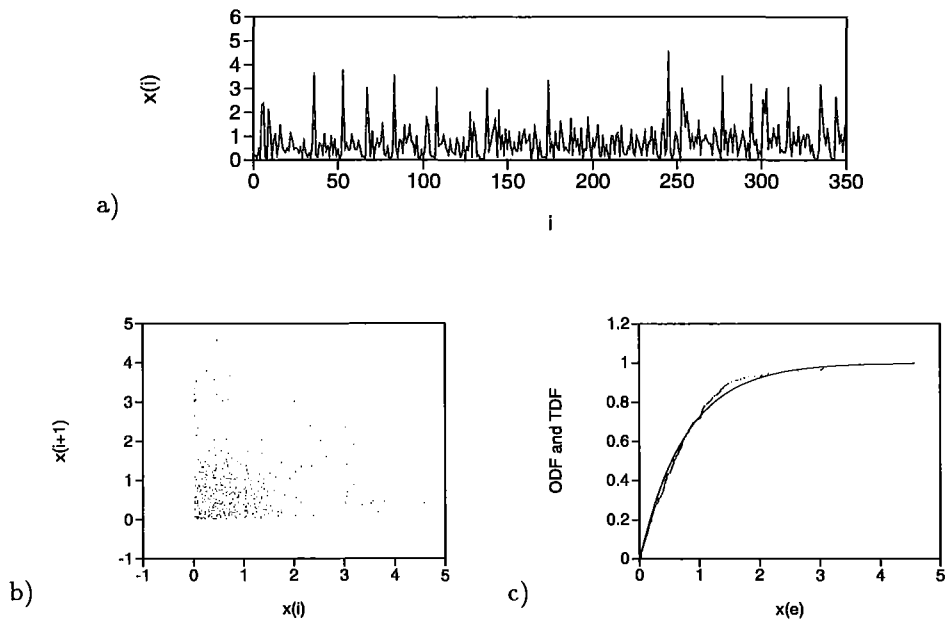


Abbildung 5.2: a) Zeitreihe und b) Wiederkehrabbildung des ISI-Datensatzes *imm2*. c) Vergleich der experimentell gefundenen Verteilungsfunktion ODF des Datensatzes *imm2* (durch dicht gedrängte einzelne Punkte bezeichnet) mit der theoretischen Verteilungsfunktion (durchgezogenen Linie) aus unserer Nullhypothese des Poisson-Prozesses.

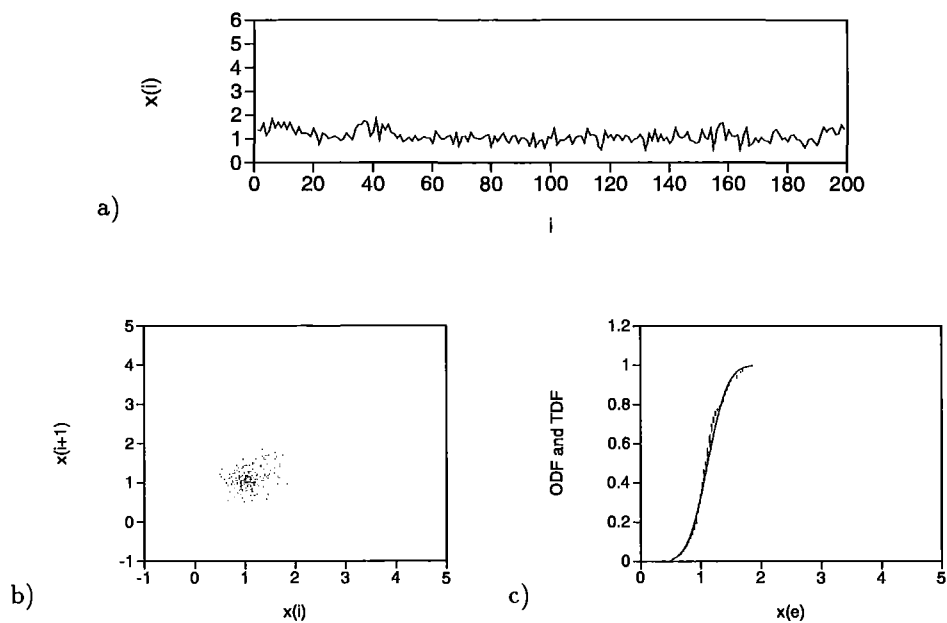


Abbildung 5.3: a), b) und c) zeigen dieselben Größen wie in der vorigen Abbildung, nun für ein Beispiel der herangereiften Schnittpräparate, hier Datensatz *mat2*. Die ODF wird in diesem Fall viel besser durch eine S-förmig gekrümmte TDF eines Gaußprozesses als zu Grunde liegender Nullhypothese als mit einer TDF des Poisson-Prozesses beschrieben.

Die entsprechende theoretischen Verteilungsfunktion TDF = $P(x_e)$ der Verteilung $p(x)$ ist definiert durch das Integral bis zu einem Endpunkt x_e über die Verteilung selbst

$$P(x_e) := \int_{-\infty}^{x_e} p(x) \cdot dx \quad (5.6)$$

Da $p(x)$ normiert ist, reicht $P(x_e)$ von Null bis Eins. Für den Poisson-Prozesse ist

$$P_P(x_e) = \int_0^{x_e} a e^{-ax} \cdot dx = 1 - e^{-a \cdot x_e} =: TDF(x_e) \quad (5.7)$$

hier mit unterer Grenze Null, da p_P auf $[0, \infty]$ definiert ist. Für die Gaußverteilung ist die Verteilungsfunktion nicht, wie für den Poisson-Prozeß noch möglich, in geschlossener Form angebbbar, sondern muß numerisch bestimmt werden.

Als einen Schätzer für die Verteilungsfunktion können wir folgende Definition angeben:

$$ODF(x_e) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Theta(x_e - x_j) \quad (5.8)$$

mit der Stufenfunktion $\Theta(x)$ definiert durch

$$\Theta(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}.$$

Bei N gegebenen Datenpunkten einer Zeitreihe geht man zur Konstruktion der ODF praktisch folgendermaßen vor: Die Datenpunkte x_i werden der Größe nach geordnet, wodurch wir eine Liste x_j mit $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ erhalten. Wir tragen die Datenpunkte x_j auf der Abszisse auf, den durch N dividierten Index j auf der Ordinate.

Für eine endlich lange Realisierung, d.h. N Datenpunkte, wird ODF um TDF herum schwanken, selbst wenn die Nullhypothese der TDF auf den zu Grunde liegenden Prozeß exakt paßt. In Abbildung 5.2 c) sehen wir, wie wenig die ISI-Datenpunkte um die theoretische Kurve $1 - e^{-a \cdot x}$ schwankt. Dabei muß der noch freie Parameter a aus den Datenpunkten x_i bestimmt werden. Man kann theoretisch aus einem Maximum-Log-Likelihood-Prinzip (siehe Anhang A) herleiten, daß a einfach gegeben ist durch das Inverse des Mittelwertes der Daten, also

$$a = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)^{-1} \quad (5.9)$$

Wir möchten nun sehen, mit welcher Häufigkeit Realisierungen der Datenlänge N , auf die die Nullhypothese zutrifft, einen kleineren Abstand KS von der theoretischen Kurve TDF haben als unsere Daten. Ist diese Häufigkeit klein, so ist es sehr wahrscheinlich, daß unsere Daten aus dem Nullprozeß stammen. Ist die Häufigkeit, bezeichnet mit $P(KS)$, dagegen groß, also beinahe 1, so besteht nur eine kleine Wahrscheinlichkeit $(1 - P(KS))$, daß unsere Daten aus dem Prozeß der Nullhypothese stammen. Diese Prozedur ist der Hypothesentest, den wir im Folgenden ausführen werden.

Dieses Prinzip ist allen statistischen Hypothesentests, wie etwa dem χ^2 -Test, gemein. Wir werden den speziellen Test auf maximalen Abstand zwischen Verteilungsfunktionen $P(x)$, den sogenannte Kolmogorov-Smirnov-Test, anwenden, weil er ohne sonst nötige Zwischenschritte auskommt (wie das Binning in Klassen vorgegebener Ausdehnung in Tests auf die Wahrscheinlichkeitsdichte direkt, etwa dem χ^2 -Test), die wieder freie Parameter enthalten, von denen das Ergebnis des Hypothesentests abhängt. Zudem ist der erste Schritt der visuellen Auftragung der Daten als ODF nicht nur einfach zu bewerkstelligen, sondern gibt auch schon Hinweise auf Abweichungen von den in Frage kommenden Nullhypothesen ohne willkürlich wählbare Bearbeitungsparameter.

Der Abstand zwischen ODF und TDF für jeden einzelnen Wert x_e ist definiert durch

$$ks(x_e) := \frac{1}{N} |ODF(x_e) - TDF(x_e)| \quad (5.10)$$

Für unseren Beispieldatensatz ist der Abstand an jedem Datenpunkt in Abbildung 5.4 graphisch aufgetragen.

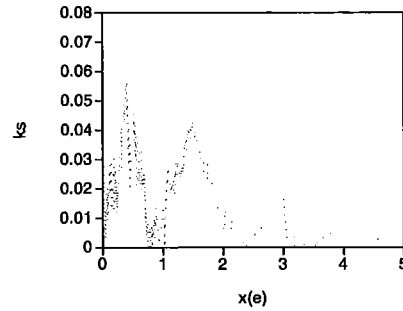


Abbildung 5.4: Die absoluten Abstände zwischen ODF und TDF, hier für den Datensatz *imm2*, sind für alle x_e dargestellt. Der maximale Wert wird *KS*-Wert genannt und ist die Testgröße des Kolmogorov-Smirnov-Tests.

Der Testwert *KS* des Kolmogorov-Smirnov-Tests ist das Maximum über alle $ks(x_e)$:

$$KS := \max_{x_e} |ODF(x_e) - TDF(x_e)| =: \|ODF - TDF\|_{max} \quad (5.11)$$

mit $\|\cdot\|_{max}$ der Maximumsnorm des Verteilungsvektors. *KS* wird Kolmogorov-Smirnov-Abstand oder einfach KS-Wert genannt. Die Verteilungsfunktion des KS-Wertes kann nach Kolmogorov und Smirnow approximiert werden durch (Rényi, 1962²⁴ [146], Press *et al.*, 1992 [154])

$$P_N(KS) = 1 - 2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \cdot e^{-2j^2 \cdot M \cdot KS} \quad (5.12)$$

mit

$$M := \left(\sqrt{N} + 0,12 + \frac{0,11}{\sqrt{N}} \right)^2 \quad (5.13)$$

wobei für $N \geq 4$ schon eine gute Approximation erreicht wird. Für $N \geq 100$ ergibt sich die weitere Vereinfachung $M \approx N$. Da wir im Weiteren kurze Datensätze

²⁴Rényi, A. (1962) *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin).

untersuchen werden, behalten wir die erstgenannte Form von M bei (Gleichung 5.13).²⁵

Aus der Verteilungsfunktion für den KS-Wert in Gleichung 5.12 kann per numerischer Differentiation auch die KS-Verteilung $p_N(KS)$ selbst berechnet werden. Für unser Beispiel (vorgegebenes N) sind $p_N(KS)$ und $P_N(KS)$ in Abbildung 5.5 gezeigt.

Für unseren Datensatz *imm2* mit $N = 354$ Datenpunkten und $a = 1,29 \text{ sec.}^{-1}$ erhalten wir einen KS-Wert von $KS = 0,0554$ und $P(KS) = 0,78$. Also würde in nur 78% der Fälle ein reiner Zufallsprozeß eine kleinere Distanz KS zwischen N-Punktrealisierung und theoretischer Verteilungsfunktion ergeben. Aber in mehr als 10% der Fälle würden größere KS-Werte auftreten. Ein Poisson-Prozeß kann also als zu Grunde liegender Prozeß für diese gemessene ISI-Zeitreihe nicht statistisch verworfen werden.

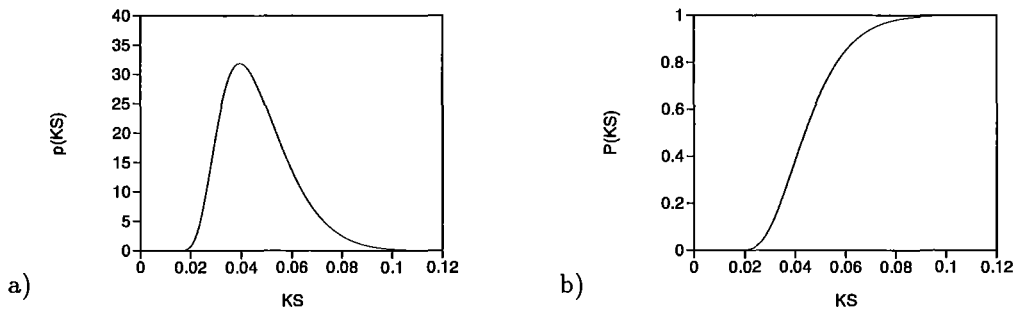


Abbildung 5.5: a) Die Verteilung der KS-Werte $p_N(KS)$ für den Datensatz *imm2*. Man sieht, daß $KS = 0,055$ sehr wohl in der erwarteten KS -Verteilung unter der Nullhypothese einer exponentiellen Verteilung der ISI nach einem Poisson-Prozeß liegt. b) Die Verteilungsfunktion $P_N(KS)$ erlaubt für den beobachteten KS -Wert ein direktes Ablesen, in wieviel Prozent der Fälle der KS -Wert unter der Nullhypothese kleiner sein würde.

Für den Gauß-Prozeß haben wir nicht den Luxus einer analytisch angebbaren Verteilungsfunktion. Aber aus der symmetrischen Verteilung kann man sich leicht vorstellen, daß die entsprechende Verteilungsfunktion S-förmig ist. In Abbildung 5.3 c) sieht man, daß für ein herangereiftes Hippocampuspräparat (Datensatz *mat2*) die ODF gut übereinstimmt mit der TDF einer Gaußverteilung, die wir numerisch aus den gemessenen Größen Mittelwert und Standardabweichung berechnet haben. Der KS -Test auf die Hypothese eines Gauß-Prozesses ergibt $P(KS) = 0,957$, aber eine vollständige Ablehnung ($P(KS) > 1 - 10^{-10}$) für den Poisson-Prozeß. Die vollständigen Resultate für alle untersuchten Datensätze können in Tabelle 5.1 für den Test auf Poisson abgelesen werden, während in Tabelle 5.3 die Ergebnisse auf getestete Gaußverteilung für die herangereiften Präparate gezeigt sind. In den anderen Fällen waren die Hypothesentests auf Gauß viel schlechter als alle anderen im Weiteren angegebenen Tests.

²⁵ Das α -Quantil KS_α ist definiert durch

$$P_N(KS_\alpha) := \int_0^{KS_\alpha} p_N(KS) \cdot d(KS) =: \alpha \quad .$$

5.4 Burstkorrektur

Obwohl der Datensatz *imm2* unmittelbar die Hypothese eines Poisson-Prozesses bestätigt, so wie es alle vier herangereiften für die Hypothese auf Gaußverteilung mit einem Konfidenzbereich von nicht weniger als 3,3% tun (siehe Tabelle 5.3), ergeben die meisten Jungpräparate observierte Verteilungsfunktionen, die von der TDF für Poisson-Prozesse stark abweichen. Diese Abweichungen finden vorwiegend für kleine ISIs statt, wie aus dem Datensatz *imm4* in Abbildung 5.6 zum Beispiel gut zu sehen ist. In Abbildung 5.6 c) kann diese Abweichung für kleine ISIs am besten gesehen werden, was zu der wohlbekannten zweihöckrigen Verteilung $p(x)$ führt.

Es wird in der Literatur immer wieder diskutiert, ob eventuell mehr Information in solchen ISI-Aktivitäten steckt als für einen reinen Poisson-Prozeß anzunehmen ist und ob diese vielleicht durch Nichtlinearitätstests (siehe z.B. Schiff *et al.*, 1994(a) [56]) detektiert werden kann. In unseren Datenreihen haben wir nur einen klaren Kandidaten mit einigen Hinweisen auf Kurzzeitvorhersagbarkeit als Zeichen für Determinismus gefunden, der statistisch abgegrenzt werden kann von linear korrelierten stochastischen Prozessen (siehe Abbildung 5.8 a)). Das Ergebnis ist vergleichbar schwach oder stark wie in Schiff *et al.*, (1994(a)) [56]. Wir haben denselben Vorhersagealgorithmus nach Schiff, Sauer & Chang (siehe Abschnitt 3.1) benutzt wie diese Autoren (siehe Chang *et al.*, 1994 [55]). Unser Fall mit positiver Vorhersagbarkeit ist der Datensatz *imm4*, der im Weiteren genauer untersucht wird.

Ausgehend von unserer Beobachtung, daß die Abweichungen zwischen ODF und TDF des Poisson-Prozesses in *imm4* eher in den kurzen ISIs auftreten als in längeren, schlagen wir einen einfachen Burst-Korrekturalgorithmus vor, um einen speziellen Typ aufeinanderfolgender kleiner ISIs zu beseitigen und zu sehen, welche Auswirkungen sich für Verteilung und höheren Korrelationen etwa charakterisiert durch den Vorhesagetest ergeben. Wir korrigieren die Bursts in folgender Weise: Zwei aufeinander folgende Intervalle, die kleiner sind als ein vorgegebener Wert δ , der Parameter des Burstkriteriums, werden als nicht existent betrachtet. Wenn das nächste ISI immer noch kleiner als δ ist, verschwindet es ebenfalls, etc.. Als Ergebnis des Algorithmus wird ein ganzer Burst durch einen Einzelspike ersetzt. Die zu Grunde liegende Hypothese ist, daß als Ergebnis der Summe aller Eingangssignale das Neuron feuert. Ob dieses Feuern in einem Einzelspike oder einem ganzen Burst resultiert, soll nicht erheblich sein. Diese Prozedur nennen wir **Burstkorrektur**. Für die Werte von δ , die wir im Folgenden betrachten, ist die Wahrscheinlichkeit, zwei aufeinanderfolgende ISIs kleiner als δ zu finden, vernachlässigbar klein für Poisson-Prozesse in den Parameterregionen, die wir gemessen haben (kleiner als 10^{-3}). Unsere Burstkorrektur sollte die hier betrachteten Poisson-Prozesse also nicht erheblich stören.

5.4.1 Effekte der Burstkorrektur auf die Verteilung

Wir testen die burstkorrigierte ISI-Zeitreihe für verschiedene Werte von δ gegen die Nullhypothese des Poisson-Prozesses, jedesmal mit $P(KS)$. Das Ergebnis wird in Abbildung 5.7 a) gezeigt: Der Originaldatensatz *imm4* zeigt ein Resultat von $P(KS) = 1$ bis auf zehn Stellen genau. Für kleine Burstkorrekturen von $\delta = 0,1 \text{ sec.}$ ist es immer noch höher als 0,98. Dann folgt ein weiter Bereich von Werten δ , in denen die burstkorrigierte Zeitreihe gut übereinstimmt mit einer exponentiellen Verteilung, d.h. $P(KS) \leq 0,95$. Ein ausgedehntes Minimum von $P(KS)$ in Abhängigkeit von δ erscheint um $\delta = 0,2 \text{ sec.}$ herum, in dem $P(KS) \leq 0,75$ ist.

Für $\delta = 0,2 \text{ sec.}$ zeigen wir explizit den Effekt der Burstkorrektur auf *imm4* in Abbildung 5.7 b). Der Vergleich der ODF des burstkorrigierten Datensatzes und seiner theoretischen Erklärung TDF ist viel besser als für die Rohdaten in Abbil-

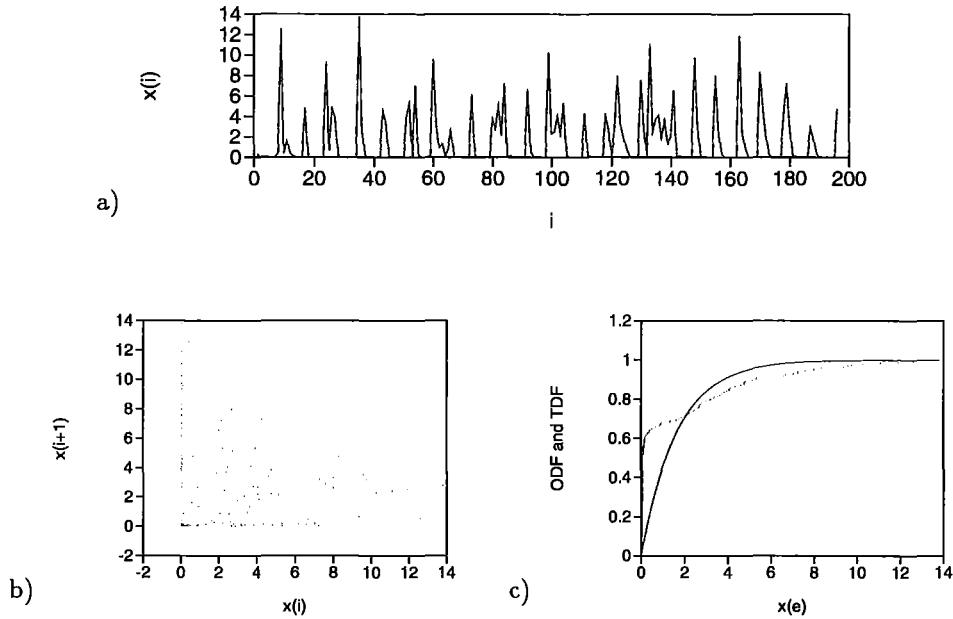


Abbildung 5.6: Datensatz *imm4* gezeigt in seinen verschiedenen Aspekten a) Zeitreihe, b) Wiederkehrabbildung und c) Verteilungsfunktion, wie in der Abbildung für *imm2* beschrieben. Am auffälligsten sind die Unterschiede zwischen Datensatz *imm4* und Datensatz *imm2* in seinen Abweichungen von der Exponentialverteilungsfunktion in c), nämlich ein höherer Anteil kleiner ISIs als erwartet unter der Nullhypothese des Poisson-Prozesses.

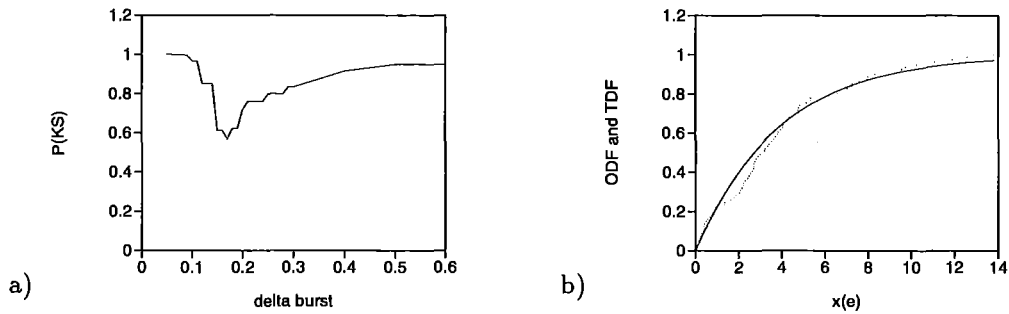


Abbildung 5.7: a) Das Ergebnis des KS-Tests des burstkorrigierten Datensatzes *imm4*, d.h. der Wert der Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion $P(KS)$ als Funktion der Korrektur für Bursts mit verschiedenen Werten des Parameters des Burstkriteriums δ . b) Vergleich der beobachteten Verteilungsfunktion ODF des burstkorrigierten Datensatzes *imm4bc* mit der theoretischen Verteilungsfunktion TDF aus unserer Nullhypothese, des Poisson-Prozesses. Innerhalb der statistischen Fluktuationen stimmen die beiden Verteilungen gut miteinander überein ($P(KS) = 0,7180$).

dung 5.6. Das Ergebnis des KS-Tests ist $P(KS) = 0,7180$. Also ist eine gute Übereinstimmung zwischen Daten und der Nullhypothese des Poisson-Prozesses erreicht. Der Effekt der Burstkorrektur auf die anderen Jungtierpräparate als auch auf die Bicucullin-präparierten Schnitte sind in Tabelle 5.2 mit ihren $P(KS)$ gegeben, jeweils für $\delta = 0,2 \text{ sec.}$

5.4.2 Effekte auf Vorhersagbarkeit

Um den Effekt unseres Burstkorrekturalgorithmus auf mögliche weitere Struktur, als sie durch die Verteilung getestet wird, zu untersuchen, wenden wir einen Vorhersagetest auf die Originalzeitreihe, so wie auf die burstkorrigierte Zeitreihe an, jeweils im Vergleich mit einem Ensemble von 40 Surrogatdatensätzen, wie sie im Theorieteil beschrieben wurden. Wir benutzen den Schiff-Sauer-Chang-Prediktor, um mit den Ergebnissen anderer Gruppen vergleichen zu können (Chang *et al.*, 1994 [55], Schiff *et al.*, 1994(a) [56]).

Der normierte Gesamtfehler $E_g(h)$ ist jeweils aufgetragen für verschiedene Vorhersagehorizonte h . Siehe Abbildung 5.8 a) für die Ergebnisse der Zeitreihe *imm4* selbst (Rauten), sowie die Ergebnisse des Ensembles von 40 Gaußskalierten Surrogaten, zusammengefaßt in Mittelwerten (in der Graphik die Quadrate) und Standardabweichungen (als Fehlerbalken dargestellt). Die untere Kurve in Abbildung 5.8 a) der Originaldaten ist genau das Ergebnis in Abbildung 4.3 b). Die obere Kurve ist aus 40 Realisationen der Surrogatisierung gewonnen, von denen eine einzelne Realisierung das Ergebnis in Abbildung 4.7 b) ist. Man sieht gut die Gleichförmigkeit der Surrogate für alle h . Die Originalzeitreihe dagegen zeigt geringere Vorhersagefehler bis etwa $h = 7$, danach ein Eintauchen in die Wolke der Surrogate, also keine weitere signifikante Unterscheidung von korreliertem Rauschen dort. Der über h maximale Abstand, die Signifikanz S , des Originalgesamtfehlers gegenüber den Surrogaten, gemessen in Standardabweichungen σ der Surrogatdatensätze,

$$S := \max_h \frac{|E_{\text{original}} - E_{\text{mean, surrogates}}|}{\sigma_{\text{surrogates}}} \quad (5.14)$$

gibt ein gutes Maß für die statistische Signifikanz des Vorhersagetests für den jeweils vorliegenden Datensatz (Theiler *et al.*, 1992 [33]). Als Ablehnung der Nullhypothese, die durch die Surrogate repräsentiert ist, gilt ein S-Wert von $S = 4 \cdot \sigma$ und höher. Da unsere Daten in der Verteilung nahe an den Poisson-Prozessen liegt, sind Gaußskalierte Surrogate unumgänglich (Rapp *et al.*, 1994 [34]).

Im nächsten Abschnitt werden wir die S-Werte für alle Originaldatensätze angeben (Tabelle 5.1). In den Fällen, in denen sich ein Wert von $S \geq 4$ ergibt, werden wir auch die burstkorrigierten Zeitreihen auf Vorhersagbarkeit untersuchen. In diesen Fällen sinkt der S-Wert von 4 und mehr auf etwa 2 Standardabweichungen, was eine Ablehnung nicht mehr statistisch signifikant erlaubt. Also wird in diesen Fällen die Hypothese eines durch Bursts gestörten Poisson-Prozesses gestützt.

Daß die Anzeichen auf Kurzzeitvorhersagbarkeit allein durch die Bursts in den ansonsten zufälligen ISI-Zeitreihen hervorgerufen werden, wird in Abbildung 5.8 b) explizit gezeigt durch Beseitigen der Bursts durch unsere Burstkorrekturmethode. Der Gesamtvorhersagefehler geht über $E_g = 1$ für alle Horizonte h und kommt nahe an die Surrogate heran, niemals weiter entfernt vom Mittelwert der Surrogate als ungefähr einmal die Standardabweichung σ . Dieses Ergebnis wird auch in anderen als Einbettungsdimension 3 gesehen. Also ist in den burstkorrigierten Zeitreihen keine weitere Information enthalten als durch die Surrogatnullhypothese erklärt. Bleibt die Frage nach möglicher Information in der Burststruktur selbst, die wir ja herauskorrigiert hatten.

Zur Untersuchung dieser Frage betrachten wir die Interburst-Intervalle (IBIs), um zu sehen, ob Information in den spontan spikenden Neuronen eher in den Bursts

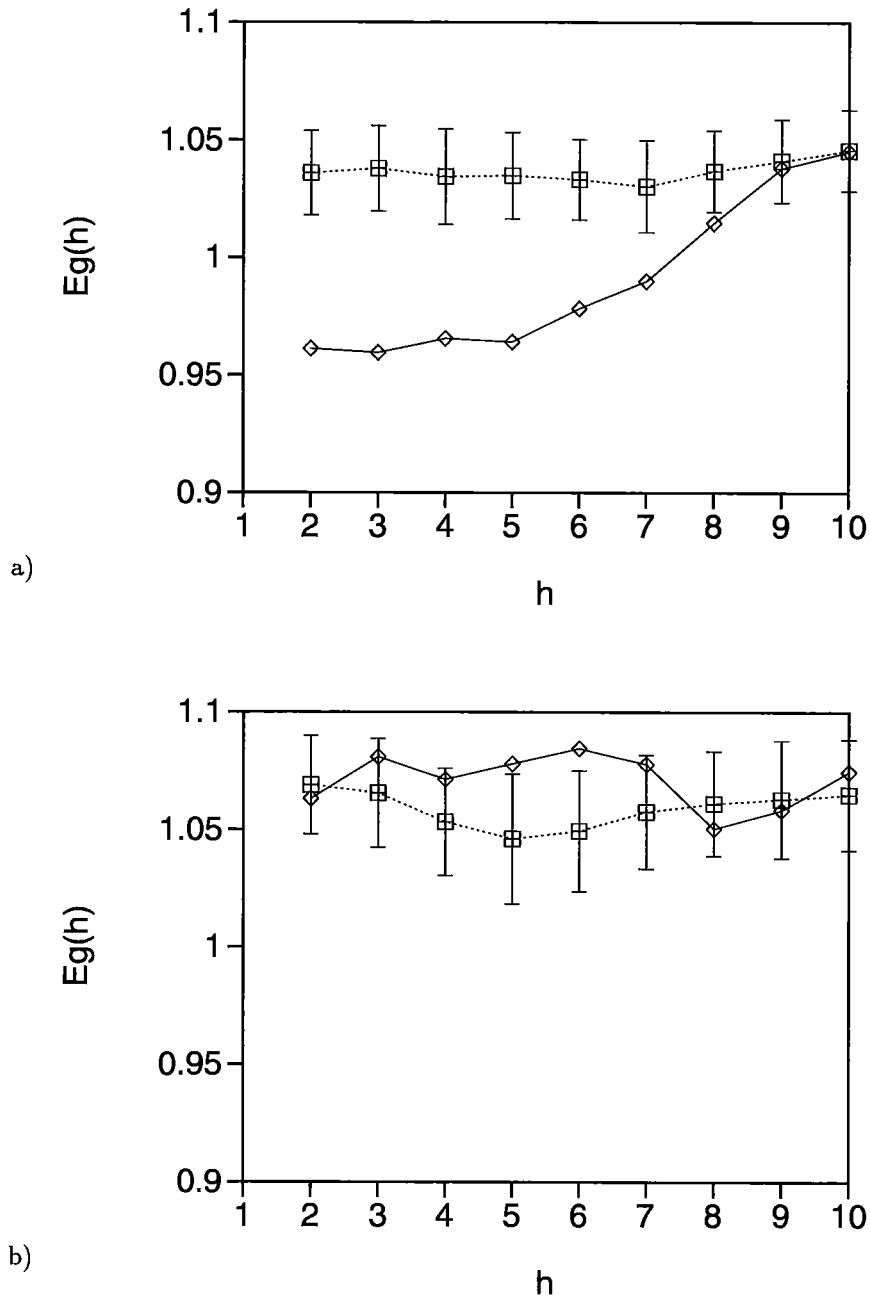


Abbildung 5.8: a) Vorhersagetestergebnisse für den Datensatz *imm4*. Angegeben sind Mittelwert und Varianz über die 40 Realisationen. b) Hier ist eine burstkorrigierte Version von *imm4* für $\delta = 0,17$ sec., gezeigt. Der Unterschied zwischen Original und Surrogaten verschwindet. In beiden Fällen ist mit 40 Surrogaten verglichen, im Vorhersagetest $E = 3$ und $\tau = 1$ verwendet.

als in Einzelspikes kodiert ist. Die resultierende IBI-Zeitreihe ist zu kurz für einen zuverlässigen Vorhersagetest ($N = 20$ in *imm4*). Die Untersuchung der Verteilung hat allerdings keine statistisch signifikante Abweichung von einem Poisson-Prozeß ergeben. Also sind auch die Bursts keine guten Kandidaten für Informationsverarbeitung auf der hier untersuchten Zeitskala in vorliegenden experimentellen Aufbau bei Spontanaktivität.

5.5 Resultate für die verschiedenen Datensätze

In den folgenden Tabellen werden die Ergebnisse für alle untersuchten Datensätze wiedergegeben. Die mit einem Stern markierten Datensätze (*) sind in den Graphiken der vorangegangenen Abschnitte dargestellt worden. Tabelle 5.1 zeigt, daß außer *imm2* und *bicu1* kein Datensatz statistisch akzeptiert wird als Realisation eines Poisson-Prozesses innerhalb des 1% Konfidenzintervalls. Der Datensatz *imm2* wird mit mehr als 20% Konfidenz akzeptiert und das Bicucullinpräparat *bicu1* mit 3,2%, so daß die Hypothese unterstützt wird, nach der Bicucullin zu ähnlichen Feuermustern führt wie sie in Jungtierschnittpräparaten beobachtet werden. Diese Hypothese wird weiter gestärkt durch das Burstkorrekturergebnis für *bicu1*, in dem ein Poisson-Prozeß akzeptiert wird mit mehr als 25 % Konfidenz (siehe Tabelle 5.2).

data set	N	a	$P(KS)$	S
imm1	150	1,038	1	5,19
imm2*	354	1,289	0,78	2,59
imm3	269	0,997	0,999970	1,06
imm4*	196	0,610	1	4,15
imm5	347	1,629	0,9999960	2,24
bicu1	187	0,663	0,968	3,44
bicu2	240	1,125	0,999999940	2,91
mat1	139	-	0,999985	1,36
mat2	199	-	1	2,23
mat3	147	-	1	0,75
mat4	170	-	1	2,89

Tabelle 5.1: Statistische Testresultate zur Nullhypothese des Poisson-Prozesses. Für jeden Datensatz werden die gesamte Anzahl N der beobachteten Interspike-Intervalle, das inverse Mittel a als der einzige Parameter für die exponentielle Verteilung und das Kolmogorov-Smirnov-Testresultat $P(KS)$ angegeben. Da die herangereiften Präparate besser durch einen Gauß-Prozeß charakterisiert werden, geben wir hier die Werte für a gar nicht an. Schließlich sind die Ergebnisse des Vorhersagetests gemessen in Standardabweichungen entfernt von den Surrogaten, die S -Werte, angegeben. Nur zwei Datensätze haben Vorhersage-Signifikanz $S \geq 4 \cdot \sigma$, zeigen also Anzeichen auf Kurzzeitvorhersagbarkeit. Sie werden in der Burstkorrektur (siehe unten) weiter betrachtet.

In Tabelle 5.2 für die burstkorrigierten ISI-Zeitreihen werden drei weitere der vier verbleibenden Jungtierpräparate akzeptiert als Poisson-Prozesse mit mehr als 1% Konfidenz. Der Effekt ist am drastischsten in *imm4*, dem einzigen Kandidaten mit Anzeichen auf Kurzzeitvorhersagbarkeit. Ein ähnlich starker Effekt wird beobachtet in *bicu1*. Wie sich bei näherer Betrachtung der burstkorrigierten *bicu2bc* Zeitreihe herausstellte, kann weder ein Poisson-Prozeß noch ein Gauß-Prozeß akzeptiert werden. Die Verteilungsfunktion scheint zwischen diesen Alternativen zu liegen. Aus

der Inspektion der Wiederkehrabbildung dieses Datensatzes nehmen wir an, daß in dieser Präparation die Blockierung der Inhibition durch das Bicucullin unvollständig geblieben ist. In dem einzigen Jungtierpräparat, daß von der Nullhypothese eines burstenden Poisson-Prozesses zurückgewiesen wird, *imm1*, gibt es ein minimales $P(KS) = 0,99987$ bei der Burstkorrektur $\delta = 0,05$ mit $a = 0,657$.

Wir beschließen unsere Betrachtungen der Burstkorrektur durch die Untersuchung der Verteilung der Interburst Intervalle vom *imm4*-Datensatz, also mit *ibi4* bezeichnet. Die Hypothese eines Poisson-Prozesses wird gut akzeptiert mit beinahe 40% Konfidenzniveau.

Tabelle 5.3 gibt die Ergebnisse des Tests auf Gaußverteilung für die vier adulten Schnittpräparate wieder. In allen Fällen wird die Hypothese akzeptiert mit 3,3% bis 6,1% Konfidenzniveau. Der Mittelwert deutet auf eine Feuerrate von einem Hertz (1 Hz) hin.

data set	N	a	$P(KS)$	S
imm1bc	82	-	0,9999936	2,46
imm2bc	-	-	-	
imm3bc	209	0,785	0,962	
imm4bc*	81	0,258	0,718	2,06
imm5bc	255	1,232	0,984	
bicu1bc	164	0,585	0,716	
bicu2bc	192	-	1	
ibi4	20	0,0648	0,607	

Tabelle 5.2: Testergebnisse der burstkorrigierten Poisson-Prozesse. Jede Burstkorrektur ist mit $\delta = 0,2 \text{ sec.}$ durchgeführt. Der Datensatz *imm2* konnte gut charakterisiert werden durch einen reinen Poisson-Prozeß, so daß keine zusätzliche Burstkorrektur benötigt wird. Der Datensatz *bicu2bc* hat mit keinem Burstkorrekturparameter δ akzeptable $P(KS)$. Die Vorhersageergebnisse für die zwei Fälle, die große Abweichungen zwischen Original und Surrogaten unter normalen Bedingungen zeigen, werden nochmals mit dem Burstkorrekturalgorithmus untersucht. Nun zeigen beide keine Ablehnung der Nullhypothese mehr.

data set	N	\bar{x}	σ	$P(KS)$
mat1	139	0,872	0,574	0,9574
mat2*	199	1,117	0,263	0,9572
mat3	147	1,237	0,441	0,967
mat4	170	1,351	0,431	0,939

Tabelle 5.3: Testergebnisse auf Gauß-Prozesse. Die charakterisierenden Parameter der Gaußverteilung, Mittelwert \bar{x} und Standardabweichung σ , sind neben N und $P(KS)$ angegeben. In allen vier Fällen kann die Nullhypothese akzeptiert werden mit Konfidenzintervallen zwischen 3,3% und 6,1%.

Die Ergebnisse des Vorhersagetests wurden schon kurz im vorausgegangenen Abschnitt diskutiert. Keine statistisch signifikante Abweichung von den Surrogaten ist in den meisten Datensätzen (siehe Tabelle 5.1) präsent. Nur zwei Datensätze weichen signifikant ab, d.h. $S \geq 4$. Nach der Burstkorrektur können auch sie nicht mehr unterschieden werden von den Surrogaten, die höchstens linear korreliertes Rauschen repräsentieren.

5.6 Zusammenfassung und Diskussion

Die vorliegenden Ergebnisse zeigen, daß während des Reifungsprozesses des hippocampalen Netzwerkes ein klarer Übergang von burstendem Poissonschem Feuern zu Gaußisch fluktuierender periodischer Dynamik in spontaner Aktivität stattfindet. Epilepsieinduzierende Konvulsatoren, wie Bicucullin, können die Dynamik ändern zurück in eine dem unreifen Zustand ähnliche Dynamik durch Blockierung des inhibitorischen Netzes. Dies impliziert eine funktionale Rolle des inhibitorischen Netzes während der Reifung und möglicherweise auch pathologische epileptische Zustände als defizitäre Unterentwicklung des inhibitorischen Systems.

In früheren Arbeiten behauptete Funde von geringer aber statistisch signifikanter Kurzzeitvorhersagbarkeit, die wir ebenfalls beobachteten, kann in unserem Falle einfach durch zufällig auftretende Bursts, d.h. aufeinander folgende kurze Interspike-Intervalle, erklärt werden. Die Bicucullin-Präparate zeigen dasselbe Verhalten wie die unreifen, was ein erster Hinweis darauf ist, daß während des Reifungsprozesses das inhibitorische System etabliert wird, um periodisch feuernde neuronale Subsysteme zu ermöglichen. Ob komplexere Dynamik damit möglich und eventuell verändert wird, kann aus den hier vorliegenden Experimenten zur Spontanaktivität nicht entschieden werden. Stimulationsexperimente sind in dieser Fragestellung vielleicht aufschlußreicher (Hayashi & Ishizuka, 1995 [54]). Bekannte Rhythmen, wie der ϑ -Rhythmus, werden in neueren Reihenexperimenten in Ratten erst ab dem 14. Tage nach der Geburt beobachtet (Papatheodoropoulos & Kostopoulos, 1996²⁶ [68]).

Zwei Hypothesen können aus diesen Befunden gezogen werden: Wenn Lernen durch Memorieren (Speichern) und Neuheitsdetektion eine Hauptaufgabe des sich entwickelnden Hippocampus ist, wie es in der Literatur vielfach behauptet wird (z.B. in Kandel, Schwartz & Jessel, 1992 [141], und Traub & Miles, 1991 [142]), dann spielt das inhibitorische System eine Schlüsselrolle in der Organisation periodischer und eventuell komplexerer Feuermuster als Basis für Lernen. Die zweite Hypothese hat klinische Relevanz: Unvollständige Entwicklung des inhibitorischen Systems während des Heranreifens kann epileptiforme Aktivität im Hippocampus hervorrufen (Menéndez de la Prida, Bolea & Sánchez-Andrés, 1996 [60]). Speziell im Falle von Epilepsien ohne histologische Befunde (z.B. in Form von Tumoren) kann dies eine interessante Erklärung sein für bestimmte Typen von Epilepsien als rein netzwerkgenerierte Eigenschaft.

Bis heute ist das inhibitorische System sehr schwer experimentell zugänglich, weil direkt korrelierte Aktivität nur im exzitatorischen System zu erwarten ist. Nur solche Korrelationen in der Exzitation werden regelmäßig untersucht. Erschwerend kommt hinzu, daß die hemmenden Interneuronen viel kleiner als die erregenden Pyramidenzellen sind, also bei intrazellulären Messungen mit der Elektrode fast nie angestochen werden können. Eine dynamische Charakterisierung, wie sie hier präsentiert wird, kann helfen, mehr über das Zusammenspiel zwischen Hemmung und Erregung insgesamt zu lernen.

Wir werden nun weg von Spontanaktivität und intrazellulären Messungen einzelner Neuronen gehen hin zu periodischen Stimulationen und Massenzellableitungen, bleiben dabei aber im selben biologischen System, dem Hippocampus und in derselben Hippocampusregion CA1.

²⁶Papatheodoropoulos, C. & Kostopoulos, G. (1996) Age-related Changes in Excitability and Recurrent Inhibition in the Rat CA1 Hippocampal Region, *European J. Neuroscience*, **8**, 510–520.

Kapitel 6

Periodische Stimulation und epileptische Anfälle

6.1 Einleitung

Bisher haben wir nur Spontanaktivität in Hippocampusschnitten betrachtet. Von den Netzwerkeigenschaften zeigen sich dort allein sehr rudimentäre Unterschiede in der Dynamik verschiedener Versuchsbedingungen: totale Unstrukturiertheit der Feuerwahrscheinlichkeit (also Poisson-Prozeß) oder stark verrauschte Periodizität (Gauß-Prozeß). In der Literatur wurde unter periodischer Anregung dagegen schon in Hippocampusschnitten weit interessantere Dynamik von Hayashi & Ishizuka 1995 [54] gefunden. Die Phasenraumplots in ihrem Artikel deuten auf Bifurkationssequenzen und verrauschte, aber klar erkennbare niedrigdimensionale chaotische Attraktoren hin.

Daß hier periodische Anregung zum Erfolg geführt hat, ist leicht einzusehen: Lebewesen sind offene Systeme. Ihre Reaktion auf die Umwelt ist wesentlich zum Erhalt ihrer Existenz. **Periodische Anregung ist die einfachste Form der Beeinflussung von außen.** Von einem Hippocampus allein ist aus der Spontanaktivität nicht viel zu erwarten. Erst seine Wechselwirkung mit anderen Hirnteilen kann seine Funktion verdeutlichen.

Das andere Ende dieser Argumentationskette ist das wache Tier in seiner Umgebung. Hier sind die äußeren Einflüsse in der Regel so vielfältig, daß das Verfolgen der Auswirkungen in höheren Gehirnteilen immer schwieriger wird. Zudem sollte zwischen den verschiedenen Regionen des Gehirns eine ständige Eigendynamik zu erwarten sein, wie jeder aus Introspektion weiß (Varela, 1996)¹ und auch experimentell inzwischen Beachtung findet (Arieli *et al.*, 1996)² [118], bisher allerdings zu wenig. Hier ist die dominante periodische Stimulation eines Bereiches des Gehirns wieder die einfachste mögliche Frage an das Versuchsobjekt.

Epilepsie kann durch periodische äußere, d.h. visuelle oder akustische Stimulation hervorgerufen werden. Hohe Aktivität in Schnittpräparaten wird oft als Anzeichen für epileptische Herde gewertet. Eine letzte Antwort auf die Frage, ob sich eine Epilepsie ausbreitet oder nur zwischenzeitlich hohe Aktivität aus anderen Gründen aufbaut, ist nur aus direkten Experimenten mit wachen Tieren zu erhalten.

Zu letzterer Frage wurden im Physiologischen Institut der Universität Groningen, Niederlande, unter Prof. B. Bohús von T. Suzuki Experimente mit implantierten Elektroden in Hippocampus von wachen Ratten gemacht. Dabei wurde die

¹Varela, F. (1996), *preprint*, unveröffentlichte Skizze.

²Arieli, A., Sterkin, A., Grinvald, A., & Aertsen, A. (1996) Dynamics of Ongoing Activity: Explanation of the Large Variability in Evoked Cortical Responses, *Science* 273, 1868–1871.

Schaffer-Kollaterale periodisch stimuliert. Eine weitere Meßelektrode in CA1 lieferte die Antwortsignale auf die Stimulation. Die Größe der Meßelektrode erlaubte das Aufnehmen der Massenaktivität von mehreren hundert Neuronen (Massenzellableitung), neben den als Störung betrachteten Einzelspikes von Neuronen der unmittelbaren Nachbarschaft der Elektrode. Die Experimente sind Mitte 1995 durchgeführt worden. Seit Mitte 1996 stehen mir ausgewählte Teile der Gesamtdatensätze zur Verfügung.

Während des 30 minütigen Experiments wurden per äußerer Beobachtung mehrere epileptische Anfälle bei den Versuchstieren beobachtet, ihre Dauer jeweils elektronisch aufgezeichnet, um sie mit den Meßergebnissen der CA1-Reaktion zu vergleichen. Eine erste Analyse zeigte Signale hoher Variabilität der Varianz während der epileptischen Anfälle und niedrigere Variabilität der Varianz zwischen den Ereignissen in der Massenzellableitung (siehe Abbildung 6.1).

Eine genauere Analyse der Meßsignale während der epileptischen Ereignisse hat folgendes Ergebnis gebracht: Dynamische Rekurrenzen, wie sie für chaotische Systeme charakteristisch sind (siehe Kapitel 3.2), wurden entdeckt. Ein Vergleich mit Surrogatdaten zeigte deutliche Abweichung der Originale von einem Ensemble der Surrogate in der ε -Skalierung um mehrere Standardabweichungen. Hiermit ist gezeigt, daß zumindest in unmittelbarer Nachbarschaft eines epileptischen Herdes chaotische Dynamik beobachtbar ist. Die Implikationen für die Theorie der Epilepsie sind weitreichend. Sie werden am Ende dieses Abschnittes aufgezeigt werden.

6.1.1 Epilepsie und nichtlineare Dynamik

Schon seit vielen Jahren sind Techniken der nichtlinearen Zeitreihenanalyse auf Meßzeitreihen der Epilepsieforschung angewendet worden, dabei fast ausschließlich auf Daten aus konventionellen Elektroenzephalogramm(EEG)-Messungen auf der Schädeloberfläche (Babloyantz & Destexhe, 1986³ [41], Frank *et al.*, 1990⁴ [43]). Diese klassischen Arbeiten zu epileptischen EEG-Untersuchungen sind aber in neuerer Zeit angezweifelt worden (Theiler, 1995⁵ [42], Theiler & Rapp, 1996⁶ [44]). Zum Beispiel sind frühere Befunde von positiven Lyapunov-Exponenten (Frank *et al.*, 1990) [43] bei erneuter Untersuchung derselben Daten widerlegt worden (Theiler, 1995) [42]. Zumeist sind es einzelne Datensätze, die entweder periodisches Verhalten mit zusätzlichem trivialem Rauschen zeigen, oder so irreguläre Signale, daß eine Abgrenzung niedrigdimensionaler Dynamik gegen hochdimensionale Rauschprozesse nicht möglich ist. Die Einführung der Surrogatdatenmethode 1992 (Theiler *et al.*) [33] hat neue Standards der statistischen Absicherung von Nichtlinearitätstests gesetzt, so daß die Reinspektion der EEG-Befunde unumgänglich wurde.

Trotzdem halten sich Behauptungen von nichtlinearer Dynamik bei Untersuchungen epileptischer EEGs, Behauptungen, die zum Teil auf der Analyse weniger Wellenzüge basieren (Friedrich & Uhl, 1996)⁷ [46]. Ein interessantes Ergebnis letztgenannter Studie ist allerdings auch zukünftig zu beachten: Befunde von verschiedenen Epilepsiedatensätzen mit Dynamik in einem bestimmten Szenario (dem von Sil'nikov, 1965⁸ [119]) führt bei verschiedenen Parametern zu qualitativ sehr ver-

³Babloyantz, A. & Destexhe, A. [1986] Low-dimensional chaos in an instance of epilepsy, *Proc. Natl. Acad. Sciences USA* **83**, 3513–3517.

⁴Frank, G.W., Lookmann, T., Nerenberg, M.A.H., & Essex, C. (1990) Chaotic Time Series Analysis of Epileptic Seizures, *Physica D* **46**, 427–438.

⁵Theiler, J. (1995) On the evidence for low-dimensional chaos in an epileptic electroencephalogram, *Phys. Rev. E* **51**, 980–994.

⁶Theiler, J., & Rapp, P.E. (1996) Re-examination of the evidence for low-dimensional, nonlinear structure in the human electroencephalogram, *EEG and clin. Neurophysiol.* **98**, 213–222.

⁷Friedrich, R. & Uhl, C. (1996) Spatio-temporal analysis of human electroencephalograms: Petit-mal epilepsy *Physica D* **98**, 171–182.

⁸Sil'nikov, L.P. (1965) A case of the existence of a countable number of periodic motions, *Soviet*

schiedenen Dynamiken, periodisch oder chaotisch. Epilepsie kann also sehr wohl ein multiples Phänomen verschiedener Dynamiken sein.

Hieraus ergibt sich eventuell eine zukünftige Klassifizierung von verschiedenen Epilepsietypen mittels approximativer Parameterwerte weniger dynamischer Szenarios. Die Frage bleibt natürlich, welche der Dynamiken führt zu **akuten Störungen des Motorkortex** mit der Folge desaströser Bewegungen des Patienten, welche Dynamiken bleiben lokale Störungen, die eventuell von Patienten gar nicht wahrgenommen werden. Man kann diese lokalen Störungen auch also **interictale Ereignisse** auffassen. Solche interictalen Ereignisse, wenngleich für den Patienten momentan belanglos, helfen bei der Diagnostik epileptischer Entstehungsherde (Foci).

Hier hilft die erst seit wenigen Jahren zugängliche Technik **intrakranialer Elektroden**. Dabei werden stark epilepsieanfälligen Patienten Elektroden mit (so in Bonn gesehen) 10 Meßpunkten in beide Hippocampi operativ eingesetzt und von den Patienten über Monate im Gehirn behalten zu Zwecken der präoperativen Diagnostik. Zu vorläufigen Ergebnissen in der Epilepsieforschung mit solchen intrakranialen Elektroden siehe van der Heijden *et al.* (1996) [49], Lehnertz, Elger (1995)⁹ [45], Casdagli *et al.* (1996)¹⁰ [47].

Bei diesen intrakranialen Elektroden besteht noch die Schwierigkeit, daß man sich per NMR(*nuclear magnetic resonance*)-Aufnahme postoperativ von der Implantationsposition der Elektroden überzeugen kann, daß der Hippocampus getroffen wurde, aber nicht von der genauen Lokalisierung der Messung in einzelnen Hippocampusregionen (wie DG oder die CA-Regionen).

Im hier vorgestellten Tierexperiment ist diese Lokalisierung durch die Stimulation mit einer zweiten Elektrode an der Schaffer-kollateralen gegeben (siehe experimentelle Beschreibung, dort Vorzeichenumkehr in der CA1-Region der Antworten auf einzelne Stimulation). Ein weiterer Vorteil des hier beschriebenen Experimentes ist die eng umgrenzte Versuchsanordnung: Die Stimulation ist klarer Auslöser des von außen an motorischen Störungen zu erkennenden Anfalls. Wir kommen damit zur genaueren Beschreibung des hier analysierten Experimentes.

6.2 Einführung in das Experiment

6.2.1 Experimentelle Präparation

Da die Daten noch unveröffentlicht sind, geben wir hier die genauen Bedingungen der experimentelle Präparation an¹¹:

Ausgewachsene männliche Wisterratten mit einem Gewicht von 400-500 g wurden nach den Grundsätzen der Tierbioethik-Kommission der Universität Groningen, Niederlande, für das Experiment benutzt. Die Ratten wurden individuell behaust unter ständiger Kontrolle der Umgebung (22° C Umgebungstemperatur, Dunkelzeiten zwischen 8:00 und 20:00 Uhr, da nachtaktive Tiere, wie auch manche theoretischen Physiker) mit freiem Zugang zu Nahrung und Wasser. Zur operativen Einpflanzung der Elektroden wurden die Ratten anästhesiert mit Natriumpentobarbitat (60 mg/kg).

Math. Dokl. 6, 163–166. Siehe auch: *Math. USSR-Sb.* 10 (1970), 91.

⁹Lehnertz, K., & Elger, C.E. (1995) Spatio-temporal dynamics of the primary epileptogenic area in temporal lobe epilepsy characterized by neuronal complexity loss. *EEG clin. Neurophysiol.* 95, 108–117.

¹⁰Casdagli, M.C., Iasemidis, L.D., Sackellares, J.C., Roper, S.N., Gilmore, R.L., & Savit, R.S. (1996) Characterizing nonlinearity in invasive EEG recordings from temporal lobe epilepsy. *Physica D* 99, 381–399.

¹¹Nach mündlicher Information von Takanori Suzuki, Groningen.

Alle Elektroden außer der Referenzelektrode sind aus ummanteltem Edelstahl-draht (*trimel coated stainless-steel wire*) mit einem Durchmesser ohne Ummantelung von $90\text{ }\mu\text{m}$ hergestellt. Ein Paar von Elektroden mit einem Abstand von 0.1 mm zwischen den Meßpunkten wurden zur zweiphasigen Stimulation und ein Paar mit 0.5 mm Abstand für monopolare Ströme benutzt.

Das Stimulationselektrodenpaar wurde stereotaktisch positioniert nach dem Gehirnatlas von Paxinos & Watson in den Schaffer-kollateralen des dorsalen Hippocampus (AP -3.7, ML 2.7, DV), während das Paar der Meßelektroden im Stratum radiale, lacunosum und oriens (AP -3.9, ML 1.7, DV) angebracht wurde. Eine Stahlbolzenschraube (2 mm im Durchmesser) sowohl als Referenz als auch als Erdung wurde am frontalen Schädel festgeschraubt, so daß das Ende des Bolzens gerade die Duraoberfläche (Dura = Großhirnrinde) berührte.

Die Positionierung der Elektroden wurde unter elektrophysiologischer Kontrolle durchgeführt. Die Stimulationselektrode, die zweiphasige Rechtecksstimuli mit 10 V , 0.1 msec . Dauer und 30 sec . Interstimulus-Intervalle gab, wurde in den Schädel gesenkt, bis positiv gerichtete Antworten im Cortex von den Meßelektroden übertragen wurden. Dann wurde das Meßelektrodenpaar abgesenkt, bis die Antwort der tieferen Elektrode negativ gerichtete Antwortensignale gab. Schließlich wurden die beide Elektrodenpaare, Stimations- und Meßelektroden, in die optimale Position adjustiert auf maximale negativ gerichtete Antwort der tieferen und positiv gerichtete der oberen Meßelektrode. Die gesamte Anordnung wurde mit Dentalzement am Schädel befestigt.

Nach mindestens einer Woche Erholungspause wurde eine kleines Metallkästchen mit Feldelektroden transistor-Vorverstärker und elektrischen Zuleitungen von Stimulator und Meßapparatur unverrückbar auf dem Kopf des Versuchstieres befestigt. Die Drähte des Kästchens gingen zum Hauptverstärker und zum Stimulationsgenerator mittels frei beweglicher Verbindung, die dem Versuchstier freie Beweglichkeit ohne Störung durch die Zuleitungen ermöglichte. Feldpotentialantworten auf periodische Stimulation in der sich frei bewegenden Ratte wurden verstärkt, nur schwach gefiltert ($0.5 - 500\text{ Hz}$ Bandpaß) und digitalisiert (Samplerate 1000 Hz) in Echtzeit elektronisch gespeichert. Verhaltensmuster der Ratte während der periodischen Stimulation wurden ebenfalls per Signal durch den Experimentator aufgezeichnet. Die Versuchsdauer bestand aus jeweils 30 Minuten Stimualtion mit der Frequenz von 10 Hz und variablen Stromstärken von $I = 50\text{ }\mu\text{A}$, $75\text{ }\mu\text{A}$, $100\text{ }\mu\text{A}$ und $200\text{ }\mu\text{A}$.

6.2.2 Erste Datenauswertung

Während der 30 minütigen Stimulation mit 10 Hz und $50\text{ }\mu\text{A}$ war kein epileptischer Anfall zu beobachten, bei $75\text{ }\mu\text{A}$ ein einzelner zu Beginn der Stimulation, dann Gewöhnung und keine weiteren Verhaltensauffälligkeiten. Dagegen zeigten sich bei $100\text{ }\mu\text{A}$ drei Anfälle mit langen Normalphasen dazwischen und bei $200\text{ }\mu\text{A}$ zahlreiche Anfälle, die nach Experimentende keine erkennbaren Änderungen der Normalaktivität in CA1 sowie des äußerlich erkennbaren Verhaltens hinterließen. Im dem uns vorliegenden Experiment waren es neun Anfälle. Da wir hier an voll entwickelten epileptischen Anfällen interessiert sind, betrachten wir im Weiteren das Experiment mit $I = 200\text{ }\mu\text{A}$.

Zur ersten Datenkomprimierung (Gesamtzahl der Daten in einem Experiment ist $30\text{ min} \times 1000\text{ Hz} = 1.800.000\text{ Punkte}$) wurde pro Stimulationsintervall die Varianz der 100 Datenpunkte pro Stimulationsperiode auf der Groninger Cray bestimmt. Siehe dazu Abbildung 6.1. Über einige Zeitbereiche ist die Varianz pro Stimulationsintervall etwa bei $\sigma^2 = 0.05$ relativ konstant. Diese Bereiche zeigen nach Vergleich mit dem Verhaltensprotokoll, daß die Ratte zu diesen Zeiten keine Anzeichen für epileptische Aktivität zeigte. In der zweiten Hälfte der Zeitreihe sind diese Ruhephasen ca. 2 Minuten lang.

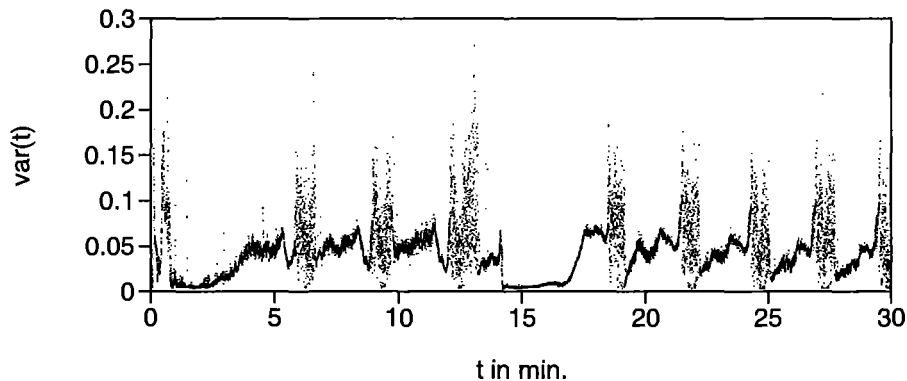


Abbildung 6.1: Varianz der Signale jeweils über eine Stimulationsperiode, aufgetragen über die Gesamtzeit des 30-minütigen Experimentes. Im weiteren werden Datenausschnitte um den Anfall bei Minute 22 untersucht.

Daneben finden sich aber auch Bereiche von ca. 1 Minute Dauer, in der die Varianz von Stimulusintervall zu Stimulusintervall stark schwankt. Diese Bereiche stellten sich als genau diejenigen heraus, in denen die Ratte epileptische Anfälle zeigte, kategorisiert in Motorseizureklassen eins bis fünf, von heftigem Zucken der Rattenbarthaare bis zu Ganzkörperkrämpfen.

Bei Betrachtung von Zeitreihenstücken in den Ruhephasen ist periodisches Verhalten der gemessenen CA1-Aktivität (regelmäßige, allerdings nicht sinusförmige Wellenzüge mit Periodenlänge gleich der Stimulationsintervalllänge von 0,1 sec.) mit nur leichten Variationen der Periodizität (Rauschen) zu beobachten. Während der epileptischen Phasen, gleich denen mit hoher Variabilität der Varianz, ist das Signal dagegen sehr unregelmäßig. Es stellt sich nun die Frage, ob diese Zeitbereiche rein stochastische Eigenschaften haben, oder ob sich in der Unregelmäßigkeit deterministisches Chaos wiederfindet. Wir haben den Anfall um Versuchszeitminute 22 samt der vorhergehenden Ruhephase näher untersucht¹². Die Ergebnisse werden in den nun folgenden Abschnitten mit Recurrence-Plot und per ε -Skalierung jeweils in Vergleich mit den Surrogatergebnissen dargestellt.

6.3 Dynamische Rekurrenzen während epileptischer Phasen

Wir untersuchen nun $N = 10\,000$ Punkte der Messung mitten im Anfall kurz vor Minute 22, da dies als ein typischer Anfall bezeichnet werden kann. Wie aus Abschnitt 3.2 zu entnehmen ist, haben die Recurrence-Plots die zwei Freiheitsgrade Einbettungsdimension E und die Nachbarschaftsnähe ε , bei zeitkontinuierlichen Systemen auch die Verzögerungszeit τ , die wesentlich die betrachtete Zeitskala des Experimentes beeinflusst.

Zahlreiche Studien solcher Datensätze sind daran gescheitert, daß bei zeitdiskretisiert gemessenen Datenreihen von physikalisch zeitkontinuierlichen Systemen der Methodentransfer von Systemen wie dem Hénon-Attraktor zu unkritisch direkt übernommen werden, ohne auf die tatsächlich relevanten Zeitskalen zu schauen. Insbesondere werden dann Einbettungsdimensionen $E = 1, 2, 3, \dots$ mit Schrittweite Δt der Zeitdiskretisierung betrachtet. Bei 1000 Hz Samplingrate endet man unweigerlich im System- oder Meßrauschen. Die negativen Befunde werden dann

¹²Datensatz zwischen 20 min. : 20 sec. und 22 min. : 20 sec., $N=120\,000$ Datenpunkte.

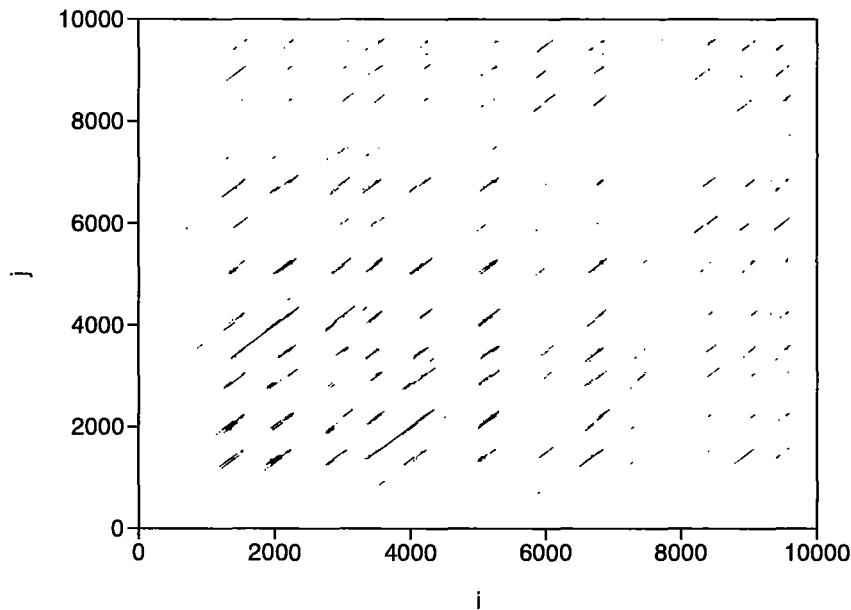


Abbildung 6.2: Recurrence-Plot eines repräsentativen Teils der gemessenen Daten für $\ln(\varepsilon) = -0,2$. Die Theilerkorrektur ist hier bei der Suche nach ε -Nachbarn benutzt.

regelmäßig mit dem "Problem des Oversamplings" hinwegdiskutiert. Bei geringen Samplingraten und eventuell noch zusätzlichen Filterungen zur Glättung werden die Daten ebenfalls verfälscht.

Da wir es hier mit einem periodisch getriebenen System zu tun haben, kennen wir bereits die interessante Systemzeitskala, ohne sie allerdings mit klassischen Mitteln wie dem Fourierspektrum vom Rauschen separieren zu können. Es sollten Zeitbereiche von einer bis zu mehreren Stimulationsperioden die für eventuellen Determinismus relevanten sein.

Wir haben zahlreiche Versuche zu Recurrence-Plots mit bis zu einer halben Stimulationsperiodendauer ($E = 50$) durchgeführt, die alle nicht zu brauchbaren Ergebnissen über irgendwelche ε -Bereiche führten. Erst gewagtere Versuche mit z.B. wie hier gezeigt $\tau = 40$ Datenpunkten und $E = 10$ zeigten schließlich dynamische Rekurrenzen, die vergleichbar sind mit denen aus unserer Studie zum Hénon-Attraktor in Abschnitt 3.2. In Abbildung 6.2 sind deutliche dynamische Rekurrenzen für $\ln(\varepsilon) = -0,2$ zu sehen.

Bei zeitkontinuierlichen Systemen ist ein zusätzliches Problem mit der Autokorrelation des Zeitsignals zu beachten. Ein dicker Streifen um die Hauptdiagonale (mit Dicke größer der Identität $x_i = x_j$ der Diagonalen selbst) ist auf Grund der Autokorrelation zu verstehen. In ε -Skalierungsplots führt er zu überproportional hohen Anzahlen $C(E, \varepsilon)$ für kleine ε , genannt Theiler-Schulter nach Theiler (1986) [22]. Dieser Effekt ist im Falle des Hénon-Attraktors unerheblich, da die Autokorrelation schnell genug abfällt. Zur Korrektur der Theiler-Schulter in der ε -Skalierung nimmt man nur die Paare x_i und x_j mit $|i-j| > w$, der Theilerkorrektur w (Theiler, 1986) [22]. Hier ist $w = 8$ aus der Autokorrelation bestimmt. Im Recurrence-Plot entspricht diese Korrektur dem Auslassen der Punkte nahe der Hauptdiagonalen. In Abbildung 6.2 haben wir diese Theilerkorrektur berücksichtigt, nicht in Abbildung 6.3, um die Linearität dieses Effektes gegenüber weiter von der Hauptdiagonalen entfernten Rekurrenzen zu zeigen.

In Abbildung 6.3 demonstrieren wir, daß die Rekurrenzstreifen aus Abbildung

6.2 nicht vollständig durch ein lineares verrauschtes Modell erklärlich sind. Abbildung 6.3 b) zeigt den Recurrence-Plot bei denselben Parametern τ , E und ε für eine Realisierung der Surrogatmethode im Vergleich zum Recurrence-Plot der Originalzeitreihe in a). Man sieht auch, daß der Theiler effekt, der fette Streifen entlang der Hauptdiagonalen allein auf den linearen Effekt der Autokorrelation zurückzuführen ist. Er verschwindet nicht mit der Surrogatisierung (Vergleiche den Zusammenhang der Surrogatmethode mit der Autokorrelation, siehe Kapitel 4).

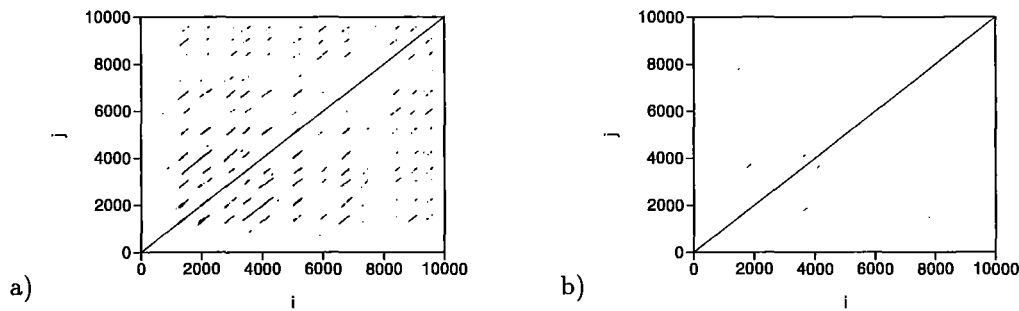


Abbildung 6.3: Der Recurrence-Plot der Originaldaten hier für kleine $\ln(\varepsilon) = -0,2$ ist gezeigt in a). In b) zeigen wir den Recurrence-Plot des Surrogates für denselben Parameterwert $\ln(\varepsilon) = -0,2$. Hier ist keine Theilerkorrektur benutzt, um zu zeigen, daß der lineare Effekt der Autokorrelation erhalten bleibt unter Surrogatisierung der Daten: Die nahe der Hauptdiagonalen liegenden Punkte sind in beiden Plots zu sehen.

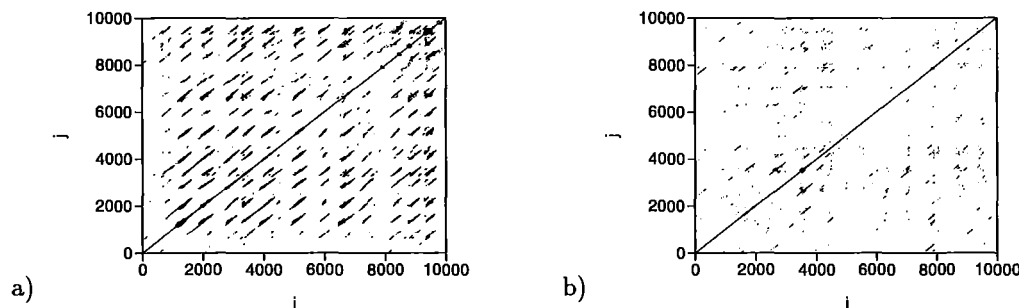


Abbildung 6.4: Der Recurrence-Plot des Originaldatensatzes, hier für große $\ln(\varepsilon) = +0,4$, ist in a) gezeigt. In b) zeigen wir den Recurrence-Plot der Surrogate für dasselbe große $\ln(\varepsilon) = +0,4$.

Die hier gezeigten Unterschiede zwischen Recurrence-Plots des Originaldatensatzes und eines Surrogates sind über einen weiten Bereich von ε sichtbar (Abbildung 6.4). Wir kommen damit zur ε -Skalierung der Anzahl schwarzer Punkte als Vergleich des Originaldatensatzes mit einem Ensemble seiner Surrogate.

6.4 Epsilonskalierung von Original und Surrogaten

Mit der Methode der Recurrence-Plots kann der Originaldatensatz immer nur mit einer Realisierung der Surrogatdaten verglichen werden. Erst die ε -Skalierung erlaubt einen quantitativen Vergleich zwischen Original und einem ganzen Ensemble von Surrogaten.

Wir wenden die ε -Skalierung auf die ersten 4000 Punkte der Zeitreihe an, um nicht unnötig Rechenzeit aufzuwenden (beacht die Rechenaufwendigkeit der Surrogatmethode!). Die entscheidenden Effekte sind auch hier gut zu sehen. Unsere Zeitreihe in der epileptischen Phase zeigt für festes τ und E eine ε -Skalierung, die obgleich mit Fluktuationen behaftet, doch einer konstanten Steigung nahe kommt für einen Bereich von $\ln(\varepsilon) = -0,6$ bis ca. $\ln(\varepsilon) = +0,6$. Für $\ln(\varepsilon) < -0,6$ sind keine Nachbarn mehr zu finden, d.h. $C = 0$ und $\ln(C) = -\infty$. Siehe durchgezogene Linie in Abbildung 6.5. Ein Ensemble von 20 Surrogaten der Zeitreihe zeigt Mittelwerte (in der Abbildung die Rauten), die weit unterhalb, gemessen in Vielfachen der Standardabweichung des Surrogatensembles, der Skalierungskurve der Originale liegen.

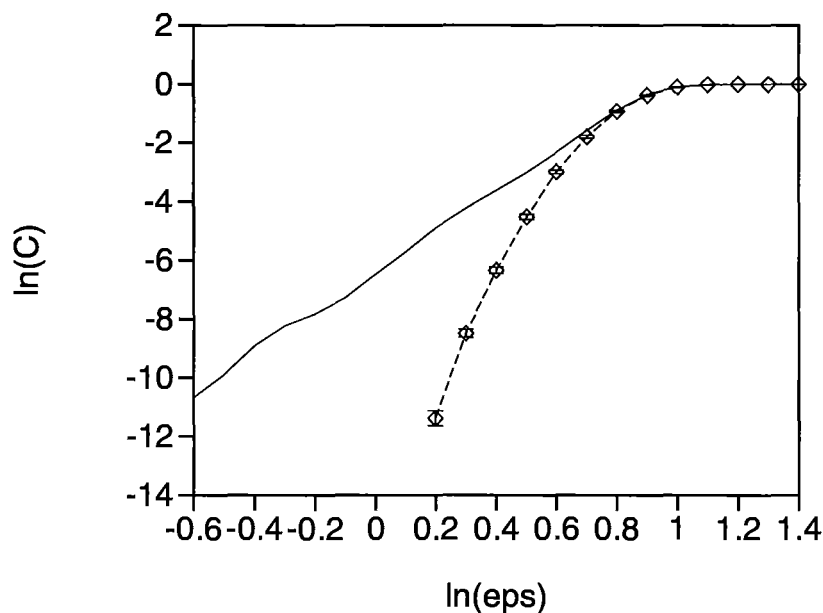


Abbildung 6.5: Vergleich der ε -Skalierung erhalten aus den Recurrence-Plots des Originals und eines Ensembles von Surrogatdaten. Die Kurve des Originaldatensatzes skaliert statistisch signifikant anders (evaluiert in Vielfachen der Standardabweichung σ der Surrogate) als die der Surrogatmittelwerte. Hier ist natürlich die Theiler-Korrektur wieder benutzt.

Damit ist gezeigt, daß es sich bei der in CA1 gemessenen Massenzellaktivität um eine Dynamik mit stark nichtlinear deterministischem Anteil handelt bei insgesamt unregelmäßig aussehenden Signalen.

Wir zeigen nun noch, wie stark die Surrogatmethode in ihren diskriminativen Fähigkeiten ist. Sie kann das periodische Signal in den Ruhephasen zwischen zwei epileptischen Anfällen als lineares leicht verrauschtes Signal erkennen und klar den Unterschied zum deterministisch chaotischen Bereich während der Epilepsien abgrenzen. Wir nehmen dazu einen gleichlanges Zeitreihenstück während der Ruhephase des Tieres um Versuchszeit Minute 23. das Ergebnis der ε -Skalierung dieser Zeitreihe im Vergleich mit einem Surrogatensemble ist in Abbildung 6.6 gezeigt: Das Original liefert die Skalierung in b), die Surrogate hier mit sehr geringer Standardabweichung in c) und beide Kurven im Vergleich in a). Sie liegen perfekt übereinander. Dies widerspricht einer Behauptung in Theiler *et al.* (1992) [33], nach der die Surrogatmethode nicht periodische verrauschte Bewegung in ihre Nullhypothese einbeziehe. Autoregressive Modelle können sehr wohl periodische Anteile der Bewegungen beschreiben.

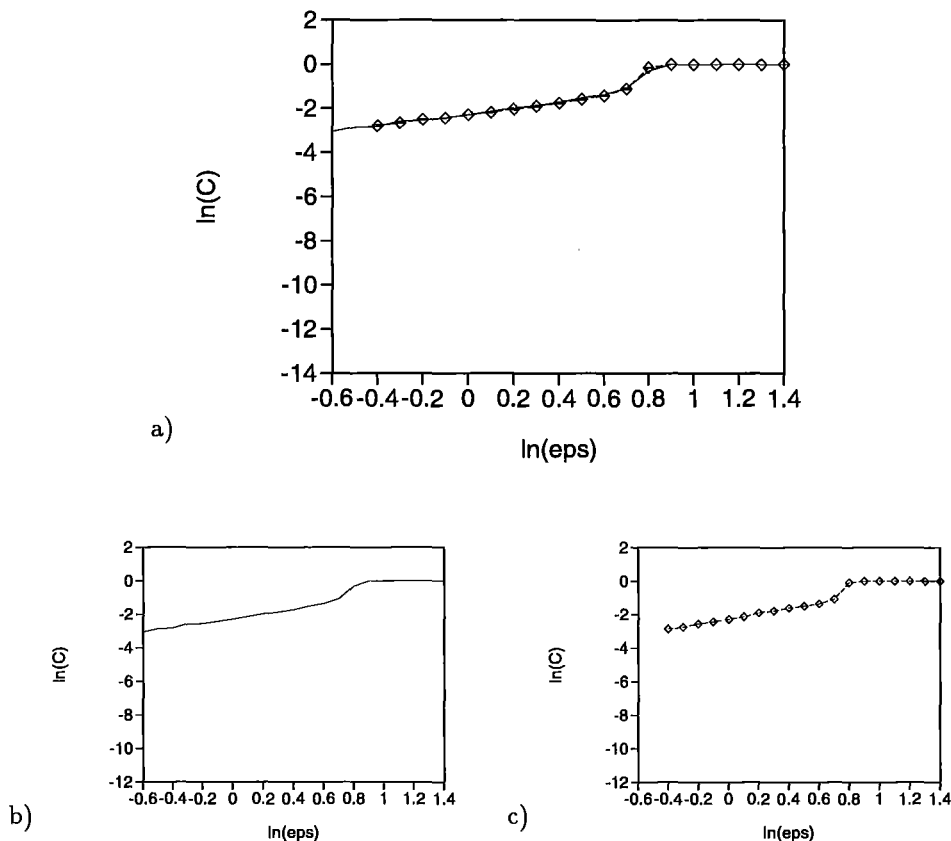


Abbildung 6.6: Der periodische Teil der Zeitreihe zeigt keine Abweichung zwischen Original- ϵ -Skalierung und der der Surrogatdaten. In a) ist die Graphik analog der vorherigen gezeigt mit Original und Surrogat und zur Unterscheidung der beiden Kurven in b) Skalierung der Originaldaten und in c) die der Surrogate. Die Steigung ist im Rahmen der Messgenauigkeit Eins, gibt also die Tatsache eines Grenzyklus wieder.

6.5 Stroboskopabbildung und Vorhersage

Die ersten Ergebnisse zu einer sinnvollen Stroboskopabbildung, die nach Abschnitt 2.3 als diskrete Abbildung eines zeitkontinuierlichen Systems in Analogie zu einer Poincaré-Abbildung zu sehen ist, und deren Vorhersagbarkeit können hier schon genannt werden, da sie allein aus den Kenntnissen der relevanten Zeitskalen auf Anhieb ebensogute oder gar bessere Ergebnisse als bei allen Untersuchungen der Interspike-Intervalle aus der Spontanaktivität der Hippocampuschnitte des vorigen Kapitels liefern.

Es sollten Details der Messungen unterhalb einer Stimulationsperiode relevant sein. Ein fünftel der Stimulationsperiode wurde hier als Länge der stroboskopischen Periode benutzt. Es zeigt sich einige Struktur, die aber von unstrukturierten Punktwolken stark überlagert ist (siehe Abbildung 6.7 a)).

Auf eine solche Stroboskopabbildung kann nun ganz analog der Wiederkehrabbildung der Interspike-Intervalle in Abschnitt 5.4.2 auch hier ein Vorhersagetest angewendet werden. Das Ergebnis ist in Abbildung 6.7 b) zu sehen. Trotz der Unregelmäßigkeit der Punktwolke der Stroboskopabbildung zeigt der Vorhersagetest eine statistisch signifikante Kurzzeitvorhersagbarkeit bis zu etwa Vorhersagehori-

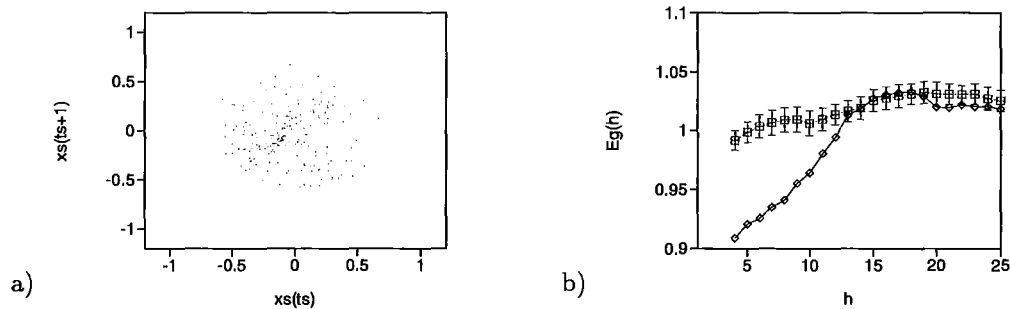


Abbildung 6.7: a) Stroboskopabbildung mit stroboskopischer Periode von einer fünftel Stimulationsperiode. Per visueller Betrachtung findet sich nicht allzuviel Struktur, die auf Abweichungen von reinem Rauschen hindeuten könnte. b) Der Vorhersagetest zeigt aber einen klaren, statistisch signifikanten Abgrenzung gegen ein Surrogatensemble aus 40 Realisierungen (S -Wert mit 10 bis 5 für bis zu Vorhersagehorizont $h=9$). Vorhersageparameter sind $E = 5$ und 20 nächste Nachbarn.

zont $h = 10$, was als erstaunlich gutes Ergebnis gewertet werden kann.

Zudem haben wir eine starke Datenreduktion (um den Faktor 20) erreicht durch den Übergang von zeitkontinuierlicher auf zeitdiskrete Dynamik. Systematische Auswertungen weiterer Daten zum vorliegenden Experiment, wie im Falle der ISI-Zeitreihen durchgeführt, stehen nun an, um zu untersuchen, unter welchen Bedingungen auch in den anderen Teilen des vorliegenden Experimentes und in anderen Experimenten die hier gezeigten Effekte auftreten. Die bisherigen Ergebnisse sind aber schon vollständig überzeugend, was die qualitativen Aussagen über das untersuchte System angeht. Bei einer weiteren Untersuchung hilft die soeben demonstrierte Datenreduktion schon bei der Datenübertragung bei Kooperationen, wie dann auch bei der Endauswertung selbst.

6.6 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben gezeigt, daß in einem Experiment mit periodischer Stimulation des Hippocampus Epilepsien erzeugt wurden, die als Stimulusrespons sowohl eine von linear verrauschten Systemen abgrenzbare ε -Skalierung als auch in stroboskopischer Abbildung Kurzzeitvorhersagbarkeit haben, also alle Anzeichen von niedrigdimensionalem deterministischem Chaos zeigen. Die Ergebnisse dieses Experimentes zeigen im Vergleich zu den Vorhersageergebnisse des Experimentes in Kapitel 5 eindeutig statistisch signifikante Vorhersagbarkeit.

Aus den hier vorliegenden Untersuchungen erweist sich der Hippocampus und speziell die periodische Stimulation dieses neuronalen Systems als ein sehr gut geeignetes Objekt zum Studium niedrigdimensionaler Dynamik in der Neurobiologie.

Wir haben uns bisher auf die Untersuchung von Massenzellaktivität und pathologische Zustände der Epilepsie beschränkt. Aus den Vorüberlegungen des Abschnittes 5.1 insbesondere zu synchronisierten Massenzellaktivitäten, wie sie zum Beispiel unter nichtpathologischen Bedingungen in Form von ϑ -Rhythmen vorkommen, lassen sich auch für Fragen der Kognition interessante Ergebnisse mit den hier vorgestellten Methoden erwarten. Die Datenbeschaffung zur Bearbeitung dieser Aufgabe wird in den nächsten Jahren erheblich erleichtert werden durch

- Neue Meßmethoden, wie intracranial implantierte Elektroden bei Epilepsiepatienten,

- vereinfachte Datenübertragung (siehe die soeben angesprochene Datenreduktion auf relevante Zeitskalen) und Datenauswertung mit den Methoden der nichtlinearen Dynamik.

Dies wird die verstärkte Zusammenarbeit von Mediziner, Neurobiologen und theoretischen Physikern auf der Systemebene von Zellverbänden und dem Gesamtgehirn, eventuell unter Einbeziehung der Reaktion der Gehirne auf Umwelteinflüsse des untersuchten Lebewesens, das Schließen der sensomotorischen Schleife (Maturana & Varela, 1988)¹³ [102], erfordern, wie es bisher mehrheitlich nur in der Mikrobiologie, etwa auf Membran- und Ionenkanalebene, praktiziert wird.

Wir werden nun kurz Möglichkeiten der dynamischen Kontrolle von Epilepsien auf nichtpharmakologischem Wege aufzeigen und dann Implikationen der bisher hier vorgeführten Untersuchungsergebnisse für die Globaldynamik des Gehirns betrachten. Insbesondere werden Möglichkeiten zur Untersuchung des Hippocampus in seinem Wechselspiel mit anderen Hirnregionen mittels neuer bildgebender Verfahren dargestellt.

6.6.1 Dynamische Kontrolle von Epilepsien

Im Jahre 1994 wurde von Schiff *et al.* [57] vorgeschlagen, Techniken der Chaoskontrolle, wie wir sie in folgenden Kapitel darstellen werden, auf dynamische Krankheiten wie die Epilepsie anzuwenden. Bisher sind allerdings nur erste Vorversuche an Hippocampusschnittpräparaten erfolgt. Als pharmakologisches Epilepsiemodell wird dort das Senken der Exzitationsschwelle im CA3-Netzwerk benutzt (was in unseren Experimenten vergleichbar mit der Bicuculin-Gabe ist). Die dynamische Beeinflussung wird antidromisch an der Schaffer-Kollateralen vorgenommen. Danach soll Epilepsie ein Festlaufen einer sonst chaotischen niedrigdimensionalen Dynamik in instabile Perioden sein, die die Antikontrolle als Methode für die dynamische Behebung von Epilepsien erlauben würde.

Nach unseren eigenen Untersuchungen, wie auch anderen Ergebnisse (siehe oben zur Literatur), ist in den wachen Ratten Epilepsie gerade der deterministisch chaotische Zustand, während periodische Antwortsignale zumindest zu Ruhephasen im äußerlich erkennbaren Verhalten der Tiere führen. Hiernach würde sich doch eher die Kontrolle instabiler Perioden in einem chaotischen Regime zur dynamischen Epilepsiebehebung eignen. Diese Hypothese sollte in einem Experiment mit periodischer Stimulation, wie es in diesem Kapitel beschrieben wurde, überprüfbar sein. Als eleganteste Methode zur Kontrolle durch Rückkopplung in einem zeitkontinuierlichen System bietet sich die Methode nach Pyragas (1992)¹⁴ [93] an, die wir in Anhang F.5 an einem Beispiel aus der Neurobiologie darstellen. Bisher sind die Möglichkeiten in diesem Bereich der dynamischen Kontrolle von Epilepsie und eventuell auch anderen Krankheiten des zentralen Nervensystems bei weitem nicht gründlich untersucht.

6.6.2 Implikationen für die Globaldynamik des Gehirns

Experimentelle Gruppen binden sich über Jahre an eine einzelne Beschreibungsebene, einzelne Experimentaufbauten. Hier besteht inzwischen ein weitere Möglichkeit: Datenanalyse verschiedener Experimente auf verschiedenen Ebenen der Beschreibung (Einzelzellableitungen in Schnitten, Stimulationsexperimente bei wachen Tieren, MEG-Datenanalyse humaner interictaler Aktivität des Gesamthirns) und Vergleiche, ohne direkt Partei für einen oder die andere Methode ergreifen zu müssen.

¹³Maturana, H.R. & Varela, F.J. (1988) *El árbol del conocimiento* (Editorial debate, Madrid, dt. Ausgabe: Scherz, München, 1990).

¹⁴Pyragas, K. (1992) Continuous control of chaos by self-controlling feedback, *Phys. Lett. A* 170, 421–428.

Erst das Betrachten aller Ebenen bietet ein vollständiges Bild. Dies ist der Anfang für theoretische Neurobiologie auf mittlerer und oberer Gehirnebene, zur Überbrückung der noch weit auseinanderklaffenden Lücke zwischen Einzelzelluntersuchungen und EEG und neueren Bildgebenden Verfahren. Vehikel dafür ist die nichtlineare Dynamik und Zeitreihenanalyse.

Neben den klassischen Untersuchungsmethoden des EEG bietet sich seit wenigen Jahren die räumlich besser auflösende Technik der Magnetoenzephalographie (MEG), bei gleich guter Zeitauflösung. Andere bildgebende Verfahren wie das funktionale MRI (fMRI-*functional magnetic resonance imaging*) und die Positron-Emissionstomographie (PET) bieten zwar weit höhere räumliche Auflösung, reichen aber in der Zeitauflösung noch nicht an den hier interessierenden Millisekundenbereich heran.

Wir haben einen Datensatz eines 38-Kanal-MEGs näher untersucht, der zur Detektion interictaler Ereignisse gemessen wurde (Bamidis *et al.*, 1996)¹⁵ [51]. Hierbei konnten aber wegen der Kürze des gemessenen Zeitintervalls und der zu starken Filterung bisher keine eindeutigen dynamische Rekurrenzen als Grundvoraussetzung für die hier benutzten Methoden festgestellt werden. Daß interictale Ereignisse als aussichtsreiche Kandidaten für den Nachweis von niedrigdimensionalem nichtlinearem Determinismus sind, wurde in van der Heijden *et al.* (1996) [49] deutlich. Weitere Untersuchungen in dieser Richtung sind also bei besserer Datenbeschaffenheit durchaus vielversprechend, besonders in Bezug auf Hippocampusepilepsien.

Wir werden nun die Untersuchung pathologischer Zustände verlassen und einen Blick auf die funktionalen Aspekte neuronaler Systeme werfen. Wieder dienen neuere Erkenntnisse nichtlineare Dynamik als Grundlage der Untersuchung. Attraktornetzwerke sind als assoziative Speicher auch für den Hippocampus als einen Kurzzeitspeicher und Neuheitsdetektor vorgeschlagen worden. Wir werden besonders eine neue Variante dynamischer Speicherung in instabilen Perioden chaotischer Attraktoren darstellen (Stollenwerk & Pasemann 1996 (a,b,c,d))¹⁶ [2, 3, 4, 5]. Eine experimentelle Überprüfung, welche Netzwerktypen schließlich zu den Funktionen des Hippocampus und seines Zusammenspiels mit anderen Hirnregionen beitragen, steht noch aus, wird aber wesentlich erleichtert werden durch die hier dargestellten Methoden der nichtlinearen Zeitreihenanalyse.

¹⁵Bamidis, P.D., Hellstrand, E., Lidholm, H., Abraham-Fuchs, K., & Ioannides, A.A. (1996) MFT in complex partial epilepsy: spatio-temporal estimates of interictal activity, *Neuroreport*, 7, 17–23.

¹⁶Stollenwerk, N., & Pasemann, F. (1996(a)) Control Strategies for Chaotic Neuromodules, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 6, 693–703.

Stollenwerk, N., & Pasemann, F. (1996(b)) Consistent Neurocontrol of Chaotic Neuromodules, *manuscript*.

Stollenwerk, N., & Pasemann, F. (1996(c)) Switching in Self-Controlled Chaotic Neuromodules, *World Congress on Neural Networks, San Diego, California*, Sept. 15–18, 1996, (pp. 680–684). INNS Press and Lawrence Erlbaum, New Jersey.

Stollenwerk, N., & Pasemann, F. (1996(d)) Selbstkonsistente neuronale Chaoskontrolle: Schalten zwischen periodischen Attraktoren, in: *Beiträge zum 2. Cottbuser Workshop "Aspekte neuronalen Lernens"*, CoWAN '96, 30.9.–2.10.1996 eds. L. Cromme, J. Wille, T. Kolb, (Reihe Mathematik M-08/1996 der Fakultät für Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik der TU Cottbus), 101–110.

Teil III

Attraktornetze als weiterführendes Konzept

Kapitel 7

Von biologischen spikenden zu artifiziellen sigmoidalen Neuronen

7.1 Einführung

Bisher haben wir sehr einfache Meßgrößen der komplizierten biologischen Neuronen wie die Interspike-Intervalle betrachtet (siehe Kapitel 5), oder einfache Meßgrößen ganzer Neuronenverbände mit ihrer komplizierten Verschaltungsstruktur, hier die Massenzellaktivität (Kapitel 6).

Wir zeigen hier nun ein schon stark vereinfachendes Neuronenmodell, das *leaky integrate and fire*-Neuron, welches gleichwohl alle wesentlichen Eigenschaften biologischer Neuronen wiedergibt. Insbesondere strebt es durch Aufintegration eines angelegten Eingangsstroms einer Spannungsschwelle entgegen, bei deren Erreichen ein Spike abgefeuert wird (integrate and fire) und anschließend das Somapotentail wieder auf die Ruhespannung gesetzt wird, um den nächsten Zyklus zu beginnen. Hieraus ergibt sich eine direkte Beziehung zwischen Eingangsstrom in das Neuron und mittlerer Feuerrate als inverser mittlerer Interspike-Intervall-Länge. Diese Beziehung ist zunächst linear.

Realistischerweise nimmt man in das Modell neben der Aufintegration, in einem Kondensator als Ersatzschaltbild, auch Spannungsverluste (*leak*) auf, dargestellt durch einen elektrischen Widerstand. Hierdurch wird die mittlere Feuerrate nicht-linear und setzt erst oberhalb eines kritischen Eingangsstromes ein. Die Beziehung ist an der Stelle des kritischen Eingangsstroms nicht differenzierbar. Für großen Eingangsstrom konvergiert die Feuerrate aber wieder gegen die des linearen Neurons, ist also nach oben unbeschränkt. Bei zusätzlicher Beachtung einer Refraktärzeit des Neurons nach jedem abgefeuerten Spike bildet die inverse Refraktärzeit eine obere Schranke für die Feuerrate. Hiermit ist das deterministische leaky-integrate-and-fire-Neuron vollständig charakterisiert.

Nimmt man nun an, daß die mittlere Feuerrate unseres bisher betrachteten Neurons in einem über eine Synapse daran angeschlossenen Neuron einen proportionalen Eingangsstrom erzeugt, so kann man aus diesen leaky-integrate-and-fire-Neuronen ganze neuronale Netze aufbauen.

Zur Analyse der Dynamik solcher neuronaler Netze können wir aus dem leaky-integrate-and-fire-Neuron unter zusätzlicher Berücksichtigung von Rauschen während der Aufintegrationsphase eine einfache sigmoidenförmige Beziehung der mittleren Feuerrate als Funktion des Eingangsstromes herleiten, diese zur Standard-

sigmoiden $\sigma(x) := 1/(1 + e^{-x})$ vereinfachen und nur noch solche abstrakten Sigmoidenneuronen als Bausteine für neuronale Netze betrachten. Der Eingang in das nächste Neuron ist dann wieder nur eine lineare Gewichtung des Ausgangssignals des vorherigen Neurons. Die qualitative Charakterisierung der Dynamik wird durch diese Vereinfachungen nicht gestört, da die mittlere Feuerrate und die Standardsigmoide durch eine invertierbare und sogar stetige Transformation ineinander überführt werden können, Netze beider Neuronentypen also topologisch äquivalente Dynamiken im Sinne von Kapitel 2.4 zeigen (immer unter der Grundannahme der Ratenkodierung).

Wir werden im Folgenden zunächst das deterministische leaky-integrate-and-fire-Neuron darstellen und aus seiner Bewegungsgleichung die Beziehung zwischen Eingangsstrom I_{in} und der Feuerrate $f(I_{in})$ herleiten. Hierbei tritt eine Nichtdifferenzierbarkeitsstelle von $f(I_{in})$ bei einem kritischen Mindesteingangsstrom I_{kr} auf, unterhalb dessen die Schwelle für das Feueren gar nicht erreicht wird.

Im zweiten Teil werden wir die verrauschte Bewegungsgleichung (vom Typ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses¹ [121], siehe Anhang D) betrachten. Sie liefert eine glatte Funktion für die mittlere Feuerrate in Abhängigkeit vom Eingangsstrom. Diese glatte Funktion ist vom Typ einer Sigmoiden, die nun zur Standardsigmoiden vereinfacht werden kann. Technisch müssen wir für den Ornstein-Uhlenbeckprozeß ein *first passage time*-Problem lösen (van Kampen, 1992) [136], um die mittlere Interspike-Intervall-Länge als Inverse der mittleren Feuerrate zu erhalten. Hier ist als Ergebnis nur eine recht komplizierte Reihendarstellung zu erhalten, so daß die Standardsigmoide quantitativ eine wesentliche Vereinfachung bedeutet, ohne qualitativ die Dynamik zu verändern. Wir werden diese Vereinfachung auf abstrakte Sigmoidenneuronen im folgenden Kapitel 8 nutzen, um Neuromodule zu konstruieren, die vielfältige Dynamiken zeigen.

Dieses Kapitel beschließen wir mit einer kurzen Betrachtung detaillierterer Modelle zur Beschreibung von Einzelzelldynamiken, die aus Messungen der verschiedenen Ionenströme durch Neuronenmembranen gewonnen wurden (Hodgkin & Huxley, 1952)² [73]. Qualitativ findet man in solchen Modellen je nach Parametereinstellung Einzelspike-Dynamik oder auch Burstverhalten (Rinzel, 1987)³ [75]. Das Prinzip der leaky-integrate-and-fire-Neuronen bleibt aber erhalten, unter gewissen Parametern sind sogar die Zeitreihen bis zum Erreichen der Feuerschwelle vergleichbar. Das vierdimensionale Differentialgleichungssystem der Hodgkin-Huxley-Gleichungen mit seinen zahlreichen Parametern läßt sich aber bis heute nicht vollständig dynamisch klassifizieren und erst recht nicht als stochastisches Differentialgleichungssystem analytisch behandeln, wie es im Fall des leaky-integrate-and-fire-Neurons schon schwierig genug ist. Zu stochastischen Simulationen des Hodgkin-Huxley-Modells siehe z.B. DeFelice & Isaac (1992)⁴ [74].

Nimmt man nun noch biologienah den Aspekt der räumlichen Ausdehnung der Zellmembran und die strukturelle Aufteilung in dendritische, Soma- und axonische Region hinzu, so lassen sich bisher nur sehr kleine Bereiche etwa der CA3-Region "realistisch" für wenige Sekunden auf Computern simulieren (Traub & Miles,

¹Uhlenbeck, G.E., & Ornstein, L.S. (1930) On the theory of the Brownian motion, *Phys. Rev.* 36, 823–841.

²Hodgkin, A.L., & Huxley, A.F. (1952) A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, *J. Physiol.* 117, 500–544.

³Rinzel, J. (1987) A Formal Classification of Bursting Mechanisms in Excitable Systems, in *Mathematical Topics in Population Biology, Morphogenesis and Neurosciences*, ed. S. Levin, Lecture Notes in Biomathematics 71 (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg). Die hier beschriebenen Parameter des Hodgkin-Huxley-Systems sind aus Experimenten mit Pankreas- β -Zellen entnommen, die elektrische Entladungen wie kortikale Neuronen zeigen, aber geometrisch einfacher gebaut sind.

⁴DeFelice, L.J., & Isaac, A. (1992) Chaotic States in a Random World: Relationship between the Nonlinear Differential Equations of Excitability and the Stochastic Properties of Ion Channels, *J. Stat. Phys.* 70, 339–354.

1991) [142]. Deshalb bleiben qualitativ beschreibende Modelle wie das stochastische leaky-integrate-and-fire-Neuronen-Modell für das grundlegende Verständnis von Dynamiken unerlässlich.

Als eine Zwischenstufe zwischen Hodgkin-Huxley-Modell und leaky-integrate-and-fire-Neuronen-Modell sei noch das zweidimensionale Differentialgleichungssystem nach FitzHugh & Nagumo erwähnt (FitzHugh, 1961⁵ [76], Nagumo *et al.*, 1962⁶ [77]). Auch dieses gibt qualitativ Spikeformen wieder, unterscheidet aber nicht mehr zwischen den experimentell zugänglichen Ionenströmen, und gibt nur zwei Zeitskalen der Dynamik wieder. Da zum qualitativen Verständnis von neuronalen Netzen nicht so sehr die genaue Spikeform wichtig ist sondern die Aufintegration bis zur Spikegenerierung, ist das leaky-integrate-and-fire-Neuron zur weiteren Analyse solcher Systeme vollständig ausreichend.

7.2 Deterministisches integrate-and-fire Neuron

In einem biologischen Neuron wird über osmotischen und aktiven Transport in Ionenkanälen ein Ruhepotential U_0 gegenüber dem Außenmedium von ca. -70 mV aufrechterhalten. Übertragen andere Neuronen über synaptische Verbindungen Transmitter, so erzeugen diese Transmitter Ionenströme in die Dendriten unseres Neurons hinein. Wir fassen alle Dendritenströme zusammen als Eingangsstrom I_{in} in den Neuronenzellkörper, das Soma. Je nach Art der Ionenströme, d.h. der Richtung des Eingangsstroms, führt dies zu einem Aufladen oder Entladen eines Kondensators der Kapazität C , wodurch sich die Spannung U im Soma einstellt nach

$$U = \frac{1}{C} \cdot Q \quad (7.1)$$

und mit dem Strom $I_{in} = \dot{Q}$ also die Somaspännungsänderung ergibt

$$\dot{U} = \frac{1}{C} \cdot I_{in} \quad (7.2)$$

Mit konstantem Eingangsstrom erhalten wir eine Differentialgleichung für $U(t)$ mit Startwert $U(T_i) = U_0$ zur Zeit T_i des i -ten Feuerns, also

$$dU = \frac{I_{in}}{C} dt$$

und integriert

$$\int_{U_0}^{U(t)} dU' = \frac{I_{in}}{C} \int_{T_i}^t dt'$$

also

$$U(t) = \frac{I_{in}}{C}(t - T_i) + U_0$$

Das Somapotentail $U(t)$ wächst also von U_0 aus linear an, bis die Feuerschwelle \tilde{U}_S (in biologischen Neuronen ca. -50 mV) erreicht wird, wodurch das Neuron feuert und damit die Feuerzeit T_{i+1} definiert, also

$$\tilde{U}_S = U(T_{i+1}) = \frac{I_{in}}{C}(T_{i+1} - T_i) + U_0 \quad (7.3)$$

⁵FitzHugh, R. (1961) Impulses and Physiological States in Models of Nerve Membrane, *Biophys. J.* 1, 445–466.

⁶Nagumo, J., Arimoto, S., & Yoshizawa, S. (1962) An active pulse transmission line simulating nerve axon, *Proc. IRE* 50, 2061–2070.

Da nur die Differenz zwischen Ruhepotential und Schwelle interessiert, setzen wir zur Vereinfachung $U_S := \tilde{U}_S - U_0$, und erhalten für das Interspike-Intervall ISI

$$ISI := T_{i+1} - T_i = \frac{C \cdot U_S}{I_{in}} \quad (7.4)$$

und für die Feuerrate als inversem Interspike-Intervall

$$f(I_{in}) := \frac{1}{ISI} = \frac{1}{CU_S} \cdot I_{in} \quad (7.5)$$

eine lineare Beziehung für f als Funktion von I_{in} mit Steigung $a := 1/CU_S$. Hiermit ist das lineare integrate-and-fire-Neuron vollständig beschrieben.

Da durch die Zellmembran ständig Ionen entweichen und Spannungsverluste (leak) erzeugen, führen wir zum Kondensator C mit Kondensatorstrom I_C parallel geschaltet einen Widerstand der Stärke R in das integrate-and-fire-Neuron ein mit Stromverlust I_R zu

$$R = \frac{U}{I_R} \quad \text{und} \quad \dot{Q} = I_C = C\dot{U} \quad (7.6)$$

Der Eingangsstrom I_{in} teilt sich also in die Teilströme

$$I_{in} = I_C + I_R = C\dot{U} + \frac{U}{R} \quad (7.7)$$

wodurch wir die Differentialgleichung des Somapentials $U(t)$ erhalten bei konstantem Eingangsstrom

$$\dot{U} = -\frac{1}{RC}U + \frac{I_{in}}{C} \quad (7.8)$$

Diese inhomogene lineare Differentialgleichung in U lösen wir durch die Methode der Variation der Konstanten der Lösung der homogenen Differentialgleichung, also $\dot{U} = -\frac{1}{RC}U$. Die Lösung von Gleichung 7.8 lautet mit der Startbedingung $U(T_i) = U_0 = 0$

$$U(t) = R \cdot I_{in} \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}(t-T_i)} \right) \quad (7.9)$$

Wieder betrachten wir die Überschreitung der Schwelle U_S zur Zeit T_{i+1} , also

$$U_S = U(T_{i+1}) = R \cdot I_{in} \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}(T_{i+1}-T_i)} \right) \quad (7.10)$$

mit dem Ergebnis für das Interspike-Intervall

$$ISI := T_{i+1} - T_i = -RC \cdot \ln \left(1 - \frac{U_S}{RI_{in}} \right) \quad (7.11)$$

und der Feuerrate

$$f(I_{in}) := \frac{1}{ISI} = \frac{1}{-RC \cdot \ln \left(1 - \frac{U_S}{RI_{in}} \right)} \quad (7.12)$$

Diese Lösung gilt für $I_{in} > I_{kr} := U_S/R$, da sonst die Logarithmusfunktion mit $\ln \left(1 - \frac{U_S}{RI_{in}} \right)$ divergiert, d.h.

$$\frac{U_S}{RI_{kr}} = 1 \quad \text{bzw.} \quad I_{kr} = \frac{U_S}{R} \quad (7.13)$$

Bei zu kleinem Eingangsstrom $I_{in} < I_{kr}$ wird die Schwelle U_S zum Feuern nie (auch nicht für $t \rightarrow \infty$) erreicht. Hier ist $f(I_{in}) = 0$. Also ist insgesamt mit der Nichtdifferenzierbarkeit bei I_{kr}

$$f(I_{in}) = \begin{cases} \frac{1}{-RC \cdot \ln\left(1 - \frac{U_S}{RI_{in}}\right)} & \text{für } I_{in} > I_{kr} \\ 0 & \text{für } I_{in} \leq I_{kr} \end{cases} \quad (7.14)$$

Für große Eingangsströme $I_{in} \rightarrow \infty$ strebt die Feuerrate gegen die des linearen integrate-and-fire-Neurons (mit der Taylorentwicklung $\ln(1+x) = x + \mathcal{O}(x^2)$ und für $I_{in} \rightarrow \infty$ folgt $U_S/(RI_{in}) \rightarrow 0$) wegen

$$\begin{aligned} f(I_{in} \rightarrow \infty) &= \frac{1}{-RC \cdot \ln\left(1 - \frac{U_S}{RI_{in}}\right)} \\ &\rightarrow \frac{1}{-RC \cdot \left(\frac{U_S}{RI_{in}}\right)} \\ &= \frac{1}{CU_S} \cdot I_{in} \quad , \end{aligned} \quad (7.15)$$

was genau mit dem Ergebnis von Gleichung 7.5 übereinstimmt.

Zur Berechnung der Feuerrate für das Neuron mit Refraktärzeit nutzen wir die vorherigen Ergebnisse unter folgender Überlegung: Nach einem Spike zur Zeit \tilde{T}_i benötigt das Neuron einige Zeit, um das Ruhepotential wieder aufzubauen und kann während dieser Refraktärzeit T_R nicht feuern. Erst zur Zeit $T_i = \tilde{T}_i + T_R$ beginnt die neue Aufintegration mit Startwert U_0 . Wir fügen also nun zum bisher betrachteten $ISI = T_{i+1} - T_i$ die Refraktärzeit T_R hinzu und erhalten das tatsächliche Interspike-Intervall \tilde{ISI} zwischen zwei Spikes mit

$$\tilde{ISI} = T_R + (T_{i+1} - T_i) = T_R - RC \cdot \ln\left(1 - \frac{U_S}{RI_{in}}\right) \quad (7.16)$$

und die Feuerrate mit Refraktärzeit

$$f(I_{in}) = \frac{1}{\tilde{ISI}} = \frac{1}{T_R - RC \cdot \ln\left(1 - \frac{U_S}{RI_{in}}\right)} \quad (7.17)$$

Für kleine Eingangsströme $I_{in} \approx I_{kr}$ wird der Term $\ln\left(1 - \frac{U_S}{RI_{in}}\right)$ viel größer als T_R , es ändert sich durch T_R also hier nichts.

Für $I_{in} \rightarrow \infty$ findet aber eine Sättigung der Feuerrate statt, d.h.

$$f(I_{in} \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{1}{T_R + RC \cdot \left(\frac{U_S}{RI_{in}}\right)} \rightarrow \frac{1}{T_R} \quad (7.18)$$

Also ist die maximale Feuerrate gegeben durch die inverse Refraktärzeit $1/T_R$.

Wir führen zur graphischen Auftragung der Feuerrate als Funktion des Eingangsstromes, Gleichung 7.17, hier noch die Reskalierung auf dimensionslose Größen durch. Aus dem Term

$$e^{-\frac{1}{RC}(t-T_i)}$$

in Gleichung 7.9 folgt, daß $\tau := RC$ die Zeitkonstante des Prozesses ist. Also ist

$$k := \frac{\tau}{T_R} \quad (7.19)$$

ebenso dimensionslos wie die neuen Variablen

$$x := \frac{I_{in}}{I_{kr}} = \frac{I_{in} \cdot R}{U_S} \quad \text{und} \quad y := T_R \cdot f\left(\frac{I_{in}}{I_{kr}}\right) \quad (7.20)$$

Wir erhalten damit aus Gleichung 7.17 die reskalierte Feuerrate $y = T_R \cdot f$ als Funktion des reskalierten Eingangsstromes $x = I_{in}/I_{kr}$

$$y(x) = \frac{1}{1 + k(\ln(x) - \ln(x-1))} \quad (7.21)$$

für $x > 1$ und $y(x) = 0$ für $x \leq 1$.

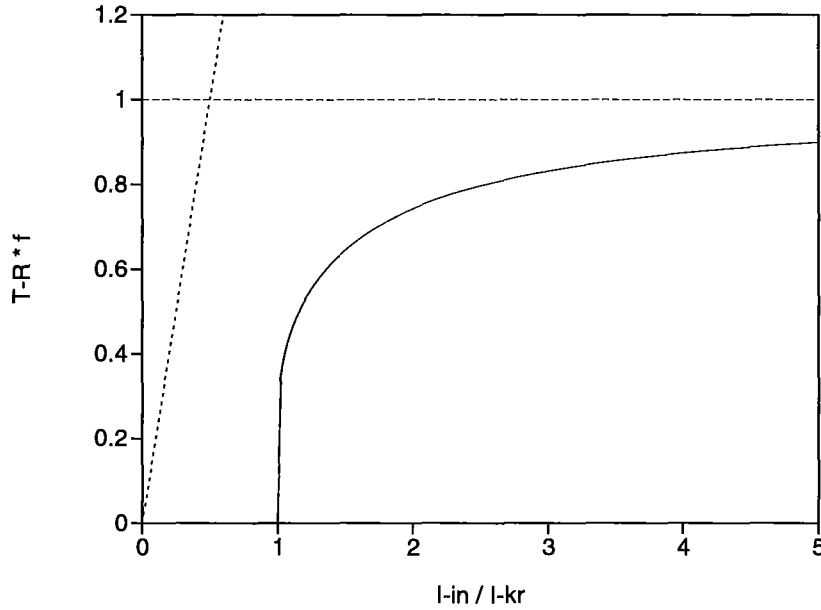


Abbildung 7.1: Feuerrate für das deterministische leaky-integrate-and-fire Neuron in Abhängigkeit vom Eingangsstrom. Angegeben sind die jeweiligen dimensionslosen Größen und Parameter $k=0,5$.

Abbildung 7.1 zeigt die Feuerrate als Funktion des Eingangsstromes in reskalierten Größen für $k := 1/2$. Gestrichelt gezeigt sind zusätzlich die Lösungen des linearen integrate-and-fire-Neurons, gegen die das leaky-integrate-and-fire-Neuron ohne Refraktärzeit konvergieren würde für $I_{in} \rightarrow \infty$, und die obere Schranke $1/T_R$ bedingt durch die Refraktärzeit, d.h. $y = 1$. Man beachte die Nichtdifferenzierbarkeit bei I_{kr} , hier also bei $x = 1$.

7.3 Integrate-and-fire Neuron unter Rauschen

Setzen wir den Eingangsstrom I_{in} als stochastische Variable an, so erhalten wir als Langevin-Gleichung den Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß (siehe Anhang D und E)

$$\dot{U} = -\frac{1}{RC}U + \frac{I_{in}}{C} + \sigma \cdot \varepsilon_t \quad , \quad (7.22)$$

als zugehörige Fokker-Planck-Gleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(U, t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} p(U, t) = -\frac{\partial}{\partial U} \left(\left(-\frac{1}{RC} + \frac{I_{in}}{C} \right) \cdot p(U, t) \right) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial U^2} (p(U, t)) \quad (7.23)$$

(siehe Gleichung D.49 mit $f := (-\frac{1}{RC} + \frac{I_{in}}{C})$ und $g := 1$). Wir nehmen für ε Gauß-normalverteiltes unkorreliertes Rauschen in Übereinstimmung mit Anhang D an.

Für deterministischen Startwert U_0 zur Zeit t_0 , d.h. $p(U, t_0) = \delta(U - U_0)$ und unbeschränkte Randbedingungen ist die zeitabhängige Lösung lange bekannt und aus folgender Überlegung (Jung, 1993)⁷ [71] leicht zu bestimmen: Durch die lineare Ornstein-Uhlenbeck-Dynamik wird das Gaußsche Rauschen ε_t in das Signal $U(t)$ linear transformiert, so daß sich nur Mittelwert und Varianz der Gaußverteilung ändern, wie aus Anhang B unter der Perron-Frobenius-Gleichung leicht zu sehen ist und auch den Übergang zur Fokker-Planck-Gleichung in Anhang D übersteht.

Also machen wir für die zeitabhängige Lösung der Fokker-Planck-Gleichung folgenden Ansatz einer Gaußverteilung mit noch zu bestimmendem Mittelwert und Varianz

$$p(U, t) := \frac{1}{\sigma_U(t)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(U-\mu_U(t))^2}{2\sigma_U^2(t)}} \quad (7.24)$$

mit Startbedingung $p(U, t_0) = \delta(U - U_0)$, d.h. $\mu_U(t_0) = U_0$ und $\sigma_U(t_0) = 0$, was aus der Darstellung der δ -Funktion als Gaußfunktion mit Varianz gegen Null folgt. Einsetzen von $p(U, t)$ in die Fokker-Planck-Gleichung und Koeffizientenvergleich für die Potenzen von U liefert (für $\mathcal{O}(U^2)$)

$$\sigma_U^2(t) = RC \cdot \frac{\sigma^2}{2} \left(1 - e^{-\frac{2}{RC}(t-t_0)}\right) \quad (7.25)$$

und (für $\mathcal{O}(U^1)$)

$$\mu_U(t) = R \cdot I_{in} + (U_0 - RI_{in})e^{-\frac{1}{RC}(t-t_0)} \quad (7.26)$$

Damit ist für den unbeschränkten Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß die Lösung $p(U, t)$ gegeben bei fester Startbedingung $p(U, t_0) = \delta(U - U_0)$, d.h. auch die Übergangswahrscheinlichkeit $p(U, t) = p(U, t|U_0, t_0)$.

Für die First-Passage-Time-Verteilung $\varrho(U_S, t_S|U_0, t_0)$, also die Verteilung für das Überschreiten der Schranke U_S zur Zeit t_S , kann nun folgende Volterra-Integralgleichung aufgestellt werden (Plesser & Tanaka, 1997⁸ [69]; van Kampen, 1992 [136], S.311, *renewal*-Gleichung mit absorbierendem Rand)

$$p(U_S, t|U_0, t_0) = \int_0^t p(U_S, t|U_S, t_S) \cdot \varrho(U_S, t_S|U_0, t_0) dt_S \quad (7.27)$$

Im Falle des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses ist $p(U_S, t|U_S, t_S)$ eine Funktion von $(t - t_S)$, d.h.

$$p(U_S, t|U_S, t_S) =: f(t - t_S) \quad (7.28)$$

was in anderen Fällen nicht stimmt (Plesser & Tanaka, 1997 [69], z.B. bei zeitlich periodisch getriebenem Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß, wie er in der stochastischen Resonanz betrachtet wird). Lassen wir weiter in der Notation der Funktionen die Startbedingungen weg, d.h.

$$p(U_S, t|U_0, t_0) =: g(t) \quad (7.29)$$

und

$$\varrho(U_S, t_S|U_0, t_0) =: h(t_S) \quad (7.30)$$

so ist die Volterra-Gleichung als Faltungsintegral zu erkennen

$$g(t) = \int_0^t f(t - t_S) \cdot h(t_S) dt_S =: (f * h)(t) \quad (7.31)$$

⁷Jung, P., (1993) Periodically driven stochastic systems, *Phys. Rep.* **234**, 175–295. Darin siehe S. 210.

⁸Plesser, H.E., & Tanaka, S., (1997) Stochastic resonance in a model neuron with reset, *Phys. Lett. A* **225**, 228–234.

und mittels Laplace-Transformation für die gesuchte First-Passage-Time-Verteilung $h(t_S)$ zu invertieren (van Kampen, 1992) [136], $t' := t - t_S$,

$$h(t_S) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{L}\{g(t)\}}{\mathcal{L}\{f(t')\}} \right\} \quad (7.32)$$

mit der Laplace-Transformation $\mathcal{L}\{f(t)\} := \int_0^\infty e^{-ts} \cdot f(t) dt =: \hat{f}(s)$ und der inversen Laplace-Transformation $\mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{ts} \cdot \hat{f}(s) ds$ mit der Kurve C in der komplexen Zahlenebene z.B. parallel zur Imaginärachse.

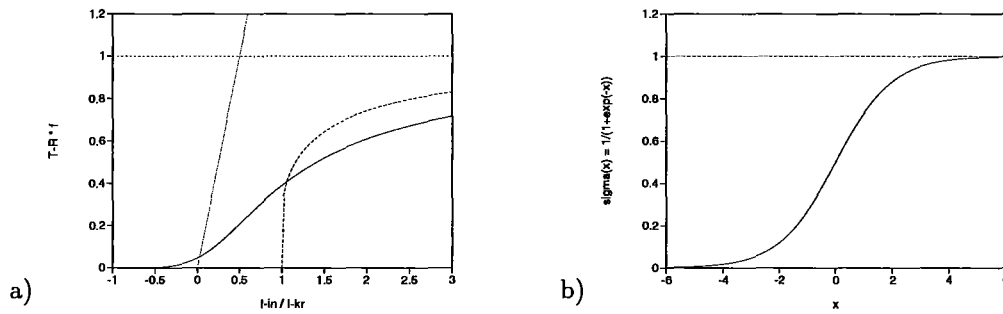


Abbildung 7.2: a) Mittlere Feuerrate für das verdrauschte leaky-integrate-and-fire Neuron in Abhängigkeit vom mittleren Eingangsstrom. Angegeben sind die jeweiligen dimensionslosen Größen und Parameter $k = 0,5$ und $\sigma = 0,3$. b) Im Vergleich dazu ist die Standardsigmoide gezeigt.

Allerdings ist im allgemeinen Fall die inverse Laplace-Transformation \mathcal{L}^{-1} in Gleichung 7.32 nicht analytisch ausführbar. Da wir an der mittleren First-Passage-Time interessiert sind, die durch den Mittelwert über g definiert ist zu

$$\langle ISI \rangle := \int_0^\infty t_S \cdot h(t_S) dt_S, \quad (7.33)$$

so können wir die Laplace-Transformierte von h direkt nutzen wegen $\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-ts} \cdot h(t) dt = - \int_0^\infty t e^{-ts} \cdot h(t) dt$, und an der Stelle $s = 0$ ist $e^{-ts} = 1$, also

$$\langle ISI \rangle = - \left(\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{h(t_S)\} \right) \Big|_{s=0}. \quad (7.34)$$

Wir erhalten schließlich (Ricciardi & Sato, 1988)⁹ [70]

$$\langle ISI \rangle = \tau \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{\Gamma(\nu/2)}{\nu!} \left(\frac{2U_S}{\sigma\sqrt{\tau}} \right)^\nu \cdot (x^\nu - (x-1)^\nu) \quad (7.35)$$

mit $\tau = RC$ und $x = I_{in}/I_{kr}$. Mit $\frac{1}{T_R} \cdot \langle ISI \rangle = \frac{\tau}{T_R} \cdot \sum \dots = k \cdot \sum \dots$ erhalten wir wieder dimensionslose Größen.

Die mittlere Feuerrate ist damit gegeben durch $f(I_{in}) = 1/(T_R + \langle ISI \rangle)$, bzw. in reskalierten Größen

$$T_R \cdot f \left(\frac{I_{in}}{I_{kr}} \right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{T_R} \langle ISI \rangle}. \quad (7.36)$$

⁹Ricciardi, L.M., & Sato, S., (1988) First-Passage-Time Density and Moments of the Ornstein-Uhlenbeck Process, *J. Appl. Prob.* 25, 43–57.

Abbildung 7.2 zeigt die mittlere Feuerrate als Funktion des Eingangsstromes in der Auftragung analog Abbildung 7.1. Die Nichtdifferenzierbarkeit bei I_{kr} ist nun geglättet, so daß $f(I_{in})$ sigmoidal wird und durch die Standardsigmoide $\sigma(x) := 1/(1 + e^{-x})$ gut ersetzt werden kann. Im folgenden Kapitel 8 werden wir nun abstrakte sigmoidale Neuronen mit der leicht handhabbaren Standardsigmoide nutzen, um die Dynamik gekoppelter Neuronen in Neuromodulen zu untersuchen. Hierbei werden schon zwei gekoppelte Neuronen zu ausgeprägt nichtlinearem Verhalten ausreichen.

7.4 Detailliertere Modelle von Einzelneuronendynamiken

In dem von uns betrachteten Modell des leaky-integrate-and-fire-Neurons ist die wesentliche Eigenschaft eines Neurons in seiner bisher bekannten Wechselwirkung mit anderen Neuronen, die nichtlineare (eben sigmoidenförmige) Signalübertragung, enthalten. Detailliertere Mechanismen, insbesondere die Spikegenerierung selbst und das anschließende Wiedererreichen des Ruhepotentials, sind bisher nicht berücksichtigt. Dies wird durch die Hodgkin-Huxley-Gleichungen biologienah erreicht (Hodgkin & Huxley, 1952) [73]:

Zur detaillierten Beschreibung des Spikeverhaltens wird in Gleichung 7.7 der Strom I_R über den Widerstand R weiter aufgespalten in die verschiedenen Ionen-teilstöme von Natrium-, Kalium- und Chlor-Ionen (Na^+ , K^+ und Cl^-) durch die Zellmembran, die selbst den Kondensator darstellt, d.h.

$$\frac{U}{R} = \frac{1}{R_{Na}} \cdot U_{Na} + \frac{1}{R_K} \cdot U_K + \frac{1}{R_{Cl}} \cdot U_{Cl} = \sum_{j=1}^3 \frac{1}{R_j} \cdot U_j \quad (7.37)$$

für $j \in \{\text{Na}, \text{K}, \text{Cl}\}$. Dies ist auch gleichzeitig die Batterie des Systems, da durch die Ladungstrennung positiver und negativer Ionen per Osmose das Ruhepotential U_0 aufrechterhalten wird.

Nach Hodgkin & Huxley (1952) [73] tragen die Teilspannungen $U_j(t)$ in verschiedener Weise zum Gesamtpotential $U(t)$ bei, also auch zum Ruhepotential, somit

$$U_j(t) := U(t) - \bar{U}_j \quad (7.38)$$

mit den Teilruhepotentialen \bar{U}_j , während die spezifischen Leitwerte $1/R_j$ sowohl spannungsabhängig werden, wodurch die Feuerstelle U_S konstituiert wird, als auch zeitabhängig, was zum Beenden des Spikes führt, sowie zum anschließenden zeitweiligen Unterschreiten des Ruhepotentials U_0 , d.h.

$$g_j := \frac{1}{R_j} = g_j(U(t), t) \quad (7.39)$$

Experimentell konnten Hodgkin und Huxley die maximalen Leitwerte \bar{g}_j der verschiedenen Ionenarten bestimmen, sowie Zeitkonstanten und die nichtlinearen Spannungsabhängigkeiten der Membrankanäle für die verschiedenen Ionenarten $\alpha_j(U)$ und $\beta_j(U)$ in folgender Weise

$$g_{Na}(U, t) = \bar{g}_{Na} \cdot m^3(U, t) \cdot h(U, t) \quad (7.40)$$

$$g_K(U, t) = \bar{g}_K \cdot n^4(U, t) \quad (7.41)$$

$$g_{Cl}(U, t) = \bar{g}_{Cl} \quad (7.42)$$

mit den Funktionen m , h und n für die spannungsabhängigen Kanäle, d.h. schnelles Öffnen der Na-Kanäle m

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m(U) \cdot (1 - m(t)) - \beta_m(U) \cdot m(t) \quad , \quad (7.43)$$

langsames Öffnen der K-Kanäle n

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(U) \cdot (1 - n(t)) - \beta_n(U) \cdot n(t) \quad (7.44)$$

und Schließen der Na-Kanäle h

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_h(U) \cdot (1 - h(t)) - \beta_h(U) \cdot h(t) \quad (7.45)$$

und den aus dem Experiment zu bestimmenden spannungsabhängigen Funktionen $\alpha_j(U)$ und $\beta_j(U)$.

Experimentell haben Hodgkin und Huxley in einem Riesenaxon des Tintenfisches (*logio squid*) zunächst die Spannung $U(t)$ konstant gehalten, um Zeitkonstante $\alpha + \beta$ nach einmaliger Stimulation zu messen, dann den stationären Zustand $\alpha/(\alpha + \beta)$ bestimmt für verschiedene U , und daraus jeweils $\alpha(U)$ und $\beta(U)$ bestimmt und damit den Anstieg $\alpha(U)$ und den Abfall $\beta(U)$ für jeden Kanaltyp erhalten (Traub & Miles, 1991 [142], Kandel, Schwartz & Jessel, 1992 [141]). Die Kanäle der jeweils anderen Ionenarten wurden dabei blockiert.

Sowohl die zahlreichen Parameter des Hodgkin-Huxley-Systems als auch die genauen Formen der nichtlinearen Funktionen $\alpha_j(U)$ und $\beta_j(U)$ sind Gegenstand intensiver Forschung an verschiedensten Neuronentypen mit ebenfalls vielfältigen Techniken, in neuerer Zeit auch Untersuchungen an Einzelkanälen. Neben den klassisch betrachteten Cl-Kanälen spielen auch Kalzium-Kanäle (Ca^{2+}) eine Rolle bei der Spikegenerierung.

Für ein detailliertes Modell eines einzelnen Hippocampus-CA3-Neurons mit 28 Kompartimenten (für die Diskretisierung der zu betrachtenden Kabelgleichung der verschiedenen räumlichen Teile des Neurons), in jedem Kompartiment $U_i(t)$ in Hodgkin-Huxley-Differentialgleichungen beschrieben unter Berücksichtigung weiterer Membran-Ionenströme und zusätzlicher synaptischer Ströme siehe Traub & Miles (1992) [142], dort Kapitel 4. Hier sind auch die funktionalen Ausdrücke für $\alpha_j(U)$ und $\beta_j(U)$ für CA3-Pyramidenzellen spezifiziert.

Als Anhaltspunkt für erste Modelle können folgende Formen für $\alpha_j(U)$ und $\beta_j(U)$ dienen:

$$\alpha_m = \frac{-\frac{1}{10}(U + 35)}{e^{-\frac{1}{10}(U+35)} - 1} \quad , \quad \beta_m = 4 \cdot e^{-\frac{1}{18}(U+60)} \quad , \quad (7.46)$$

$$\alpha_n = \frac{-\frac{1}{100}(U + 50)}{e^{-\frac{1}{10}(U+50)} - 1} \quad , \quad \beta_n = \frac{1}{8} \cdot e^{-\frac{1}{80}(U+60)} \quad , \quad (7.47)$$

$$\alpha_h = \frac{7}{100} \cdot e^{-\frac{1}{20}(U+60)} \quad , \quad \beta_h = \frac{1}{e^{-\frac{1}{10}(U+30)} + 1} \quad , \quad (7.48)$$

nach DeFelice & Isaac (1992) [74].

Im vereinfachten FitzHugh-Nagumo-System (FitzHugh, 1961) [76] werden die Variablen $U(t)$ und $m(t)$ des Hodgkin-Huxley-Systems durch die "schnelle" Variable $v(t)$ dargestellt, die Variablen $n(t)$ und $h(t)$ des Hodgkin-Huxley-Systems durch

die "langsame" Variable $w(t)$, während als Nichtlinearität in der Dynamik nur ein kubischer Term in v übrigbleibt:

$$\frac{dv}{dt} = v \cdot (1 - v) \cdot (v - a) - w \quad (7.49)$$

und

$$\frac{dw}{dt} = b \cdot (v - \gamma \cdot w) \quad (7.50)$$

mit Parametern $a \in (0, 1)$, $b, \gamma > 0$.

Wir werden uns im Weiteren auf Neuronen mit der Standardsigmoiden als Transferfunktion, wie durch das stochastische leaky-integrate-and-fire-Neuron hier in Abschnitt 7.3 motiviert, und lineare Übertragung beschränken. Dabei ist schon über die Zeit der Ausschmierung der Spikes in den Dendriten und die Aufsummierung der einlaufenden Ströme ins Soma integriert, so daß eine zeitdiskrete Dynamik zwischen den Neuronen betrachtet werden kann.

Kapitel 8

Attraktorschalten in kontrollierten chaotischen Neuromodulen

Die Aktivitätendynamik von ausreichend rekurrent verschalteten Neuronenverbänden zeigt in weiten Parameterbereichen deterministisches Chaos. Die Trajektorien chaotischer Attraktoren sind um unendlich viele instabile Perioden angeordnet, denen sie beliebig nahe kommen. Jeder diese instabilen periodischen Orbits kann durch eine Feedback-Kontrolle stabilisiert werden.

Nach der allgemeinen Darstellung der Kontrolle chaotischer Attraktoren in Anwendung auf ein minimales chaotisches Neuromodul wird die Flexibilität der chaotischen Systeme zur Konstruktion eines Modules erkundet, welches Schalten zwischen mehreren periodischen Mustern auf zwei verschiedene Weisen ermöglicht: entweder determiniertes Schalten durch externe Eingaben, d.h. ein von außen vorgegebenes Schaltprogramm, oder spontanes Schalten mittels dynamischem Rauschen im chaotischen Untermodul.

Der chaotische Attraktor fungiert hier als ein vermittelnder Zustand zwischen aufeinander folgend stabilisierten dynamischen Mustern. Er beinhaltet alle möglichen dieser dynamischen Muster, vergleichbar einem Aufmerksamkeitszustand zwischen den Zuordnungen verschiedener Stimuli zu vorgegebenen Verhaltensprogrammen.

8.1 Einführung

In den letzten Jahren hat sich die Untersuchung deterministisch chaotischer Dynamiken als immer wichtiger für alle Bereiche der Neurowissenschaften erwiesen. Nachdem wir in den vorhergehenden Kapiteln Meßzeitreihen realer neurobiologischer Systeme auf mögliche deterministisch chaotische Dynamik hin untersucht haben, erkunden wir in diesem Kapitel 8 funktionelle Aspekte spezifisch nicht-linearer Systemeigenschaften zur biologischen und technischen Informationsverarbeitung. Diese werden in der Fachliteratur in den letzten Jahren ausgiebig diskutiert. Wir werden hier eine kleine Auswahl vorstellen.

Neben dem klassischen Artikel von Skarda & Freeman (1987)¹ [101], der die Diskussion um nichtlineare Dynamik und mögliche funktionale Relevanz in der

¹Skarda, C.A. & Freeman W.J. (1987) How brains make chaos in order to make sense of the

biologischen Informationsverarbeitung bis zur Mitte des letzten Jahrzehnts zusammenfaßt, wird zunehmend häufiger über Anzeichen für Chaos auf den verschiedenen Ebenen der Neurobiologie berichtet (siehe den Stand der Diskussionen in Kapitel 5 und 6). Funktionale Aspekte sowohl zur Beschreibung der Prinzipien biologischer Systeme als auch artifizieller intelligenter Agenten werden von vielen Autoren diskutiert, eindrucksvoll z.B. von Babloyantz & Lourenço (1994)² [91]. In jener Arbeit wird speziell Chaoskontrolle zur Erkundung von generellen Eigenschaften (wie *feature detection*) aus einem bestimmten Eingabemuster genutzt, wobei die kontrollierten raumzeitlichen Orbits als Analysatoren agieren.

Unendlich viele instabile periodische Orbits (UPOs, von engl. *unstable periodic orbits*) bilden ein Skelet in dem selbst nicht periodischen chaotischen Attraktor und bestimmen seine grundlegende topologische Struktur (Procaccia, 1987) [107]. Die Grundidee der Chaoskontrolle besteht in der Stabilisierung eines dieser unendlich vielen periodischen Orbits für bestimmte Zeit durch eine Feedback-Kontrolle (Ott, Grebogi, & Yorke, 1990³ [88], siehe auch Anhang F). Dieser Mechanismus benötigt nur kleinste Kontrollsignale, da die Umgebung jedes der überhaupt vorhandenen Perioden ohnehin von der chaotischen Dynamik nach einer Übergangszeit aufgesucht wird.

Einer der ersten Artikel, in dem Chaoskontrolle zur Informationsverarbeitung vorgeschlagen wird, datiert zurück auf das Jahr 1991 (Ding & Kelso)⁴ [90] und beruht auf den in Skarda & Freeman aufgestellten Hypothesen. Trotzdem ist in dieser wie in allen darauffolgenden Anwendungen entweder der Controller (Babloyantz & Lourenço, 1994) [91] oder das chaotische System selbst (z.B. verwenden Alsing *et al.* (1994)⁵ [92] den Hénon-Attraktor als zu kontrollierende chaotische Dynamik) rein algorithmisch.

Wir schlagen ein konsistentes chaoskontrolliertes Neuromodul vor, in dem sowohl das chaotische Submodul (ein minimalistisches Zweineuronenmodul mit zeitdiskreter Aktivitätendynamik und sigmoidaler Transferfunktion nach Pasemann (1995 und 1996(c))⁶ [82, 84] als auch der Chaoskontroller aus demselben Typ von Neuronen in einer konsistenten dynamischen Struktur konstruiert sind (Stollenwerk & Pasemann, 1996(b))⁷ [3]. Zu diesem Zweck mußte eine später einfach in Sigmoidenneuronen implementierbarer Feedback-Kontroller untersucht werden: Least-Squares-Kontrolle (siehe Stollenwerk & Pasemann, 1996(a))⁸ [2], basierend auf den Prinzipien der Chaoskontrolle wie in Ott, Grebogi & Yorke und Romeiras *et al.* (1992)⁹ [96] beschrieben, aber mit modifiziertem Kontroller ähnlich dem von Reyl

world, *Behav. Brain Sci.* **10**, 161–195.

²Babloyantz, A. & Lourenço, C. (1994) Computation with chaos: A paradigm for cortical activity, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **91**, 9027–9031.

³Ott, E., Grebogi, C. & Yorke, J.A. (1990(a)) Controlling chaos, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1196–1199.

⁴Ding, M. & Kelso, S. (1991) Controlling chaos: A selection mechanism for neural information processing, in: *Measuring Chaos in the Human Brain* eds. D. W. Duke, W. S. Pritchard, (World Scientific, Singapore), 17–31.

⁵Alsing, P.M., Gavrielides, A., & Kovanis, V. (1994). Using neural networks for controlling chaos, *Physical Review*, **E 49**, 1225–1231.

⁶Pasemann, F. (1995) Neuromodules: A dynamical systems approach to brain modelling, in: *Supercomputing in Brain Research - From Tomography to Neural Networks* eds. H. Herrmann, E. Pöppel, D. Wolf, (World Scientific, Singapore), 331–347.

Pasemann, F. (1996(c)) Komplexe Neurodynamik zur Informationsverarbeitung? in: *Beiträge zum 2. Cottbuser Workshop "Aspekte neuronalen Lernens", CoWAN '96, 30.9.–2.10.1996* eds. L. Cromme, J. Wille, T. Kolb, (Reihe Mathematik M-08/1996 der Fakultät für Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik der TU Cottbus), 75–86.

⁷Stollenwerk, N., & Pasemann, F. (1996(b)) Consistent Neurocontrol of Chaotic Neuromodules, *unpublished manuscript*.

⁸Stollenwerk, N., & Pasemann, F. (1996(a)) Control Strategies for Chaotic Neuromodules, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **6**, 693–703.

⁹Romeiras, F.J., Grebogi, C., Ott, E., & Dayawansa, W.P. (1992). Controlling chaotic dynamical systems. *Physica D*, **58**, 165–192.

et al. (1993)¹⁰ [95] benutzten) mit der zusätzlichen Schwierigkeit einer Verzögerung in der Rückkopplung (Stollenwerk, 1995)¹¹ [1]. Zu den entsprechenden Rechnungen siehe auch Anhang F.

Dann kann eine sehr effektive Einpunktkontrolle (deren Voraussetzungen für das benutzte chaotische Untermodul im Detail in Stollenwerk & Pasemann, 1996(a) [2], untersucht wurden) eingesetzt werden, um das Phänomen des Schaltens zwischen verschiedenen periodischen Orbits zum erstenmal in einem konsistenten selbstkontrollierten Neuromodul zu demonstrieren (Stollenwerk & Pasemann, 1996(b)) [3].

Zwei verschiedene Mechanismen des Schaltens können zur Zeit unterschieden werden (Stollenwerk & Pasemann, 1996(c))¹² [4]:

- deterministisches Schalten durch externe Eingaben in die Controller und
- spontanes Schalten durch dynamisches Rauschen im chaotischen Untermodul.

In beiden Fällen verbindet der chaotische Attraktor die verschiedenen Perioden miteinander. Nach dem Abschalten der Kontrolle im erste Fall, bzw. dem rauschbedingten Verlassen der kontrollierten Periode im zweiten Fall läuft das System entlang dem chaotischen Attraktor in einer Transiente, bevor es in einer anderen kontrollierten Periode eingefangen wird. Hier nutzen wir die Instabilität der UPOs im unkontrollierten chaotischen System.

Der zweite Mechanismus ist besonders interessant für das Phänomen der Aufmerksamkeit: Durch Einstellen interner Parameter der Kontrolle, z.B. der Größe der Kontrollregion, kann die relative Häufigkeit des Verbleibens in verschiedenen Perioden verändert werden, was zu einer Vorbewertung der durch die UPOs charakterisierten Eigenschaften eines Analysators *a lá* Babloyantz-Lourenço (1994) [91] führt.

8.2 Selbstkonsistente Neuronale Chaoskontrolle

8.2.1 Chaotisches Neuromodul und instabile Perioden

Zur Illustration des Prinzips der selbstkonsistenten neuronalen Chaoskontrolle benutzen wir das einfachste mögliche chaotische Neuromodul und den einfachsten verfügbaren Kontrollalgorithmus: ein zeitdiskretes zweidimensionales Neuromodul mit Aktivitätsvektor $\underline{x}_n := (x_n, y_n)^{tr}$ zum Zeitschritt n und sigmoidaler Transferfunktion $\sigma(x)$, wie sie in Gleichung 2.12 definiert ist, kontrolliert durch einen linearen Least-Squares-Kontroller der Form $\underline{p}_n := (p_n(\Delta \underline{x}_{n-1}), 0)^{tr}$. Zur Herleitung von p_n als Funktion des Abstandes der Systemdynamik vom zu kontrollierenden UPO siehe Anhang F.

Mit der Konvention, daß $\sigma(\underline{x})$ die komponentenweise Anwendung der Funktion σ auf \underline{x} bezeichnet, wodurch wir einen Vektor derselben Dimension wie \underline{x} selbst erhalten, können wir das chaotische Untermodul schreiben als

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{v} + W \cdot \sigma(\underline{x}_n) + \underline{p}_n \quad (8.1)$$

¹⁰Reyl, C., Flepp, L., Badii, R., & Brun, E. (1993) Control of NMR-laser chaos in high-dimensional embedding space. *Physics Review*, E 47, 267–272.

¹¹Stollenwerk, N. (1995) Self-controlling chaos in neuromodules, in: *Supercomputing in Brain Research - From Tomography to Neural Networks* eds. H. Herrmann, E. Pöppel, D. Wolf, (World Scientific, Singapore), 421–426.

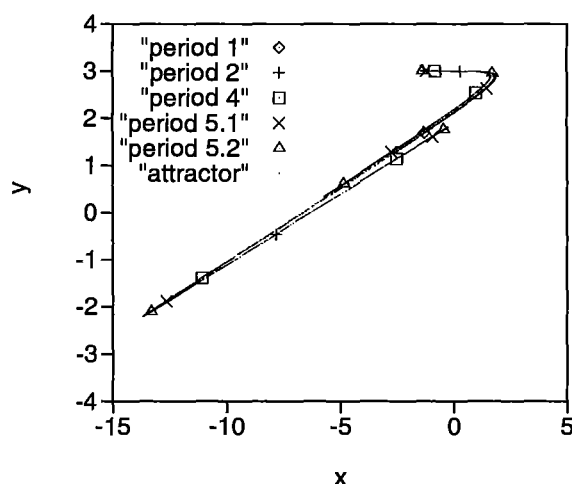
¹²Stollenwerk, N., & Pasemann, F. (1996(c)) Switching in Self-Controlled Chaotic Neuromodules, *World Congress on Neural Networks, San Diego, California*, Sept. 15–18, 1996, (pp. 680–684). INNS Press and Lawrence Erlbaum, New Jersey.

mit $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$. Dies ist eine vereinfachende Schreibweise für Gleichung 2.13 plus dem schon zugefügten Kontrollterm \underline{p}_n .

Für die Parameter aus Gleichung 2.15, hier in angepaßter Schreibweise

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} -20 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$$

ist ein Orbit des chaotischen Attraktors in Abbildung 8.1 dargestellt durch kleine Punkte, die sich auf einer fraktalen Menge sammeln, inclusive der ersten instabilen periodischen Orbits 1, 2, 4 und zwei Perioden fünf, bezeichnet als 5.1 und 5.2, in ihrer Position auf dem Attraktor gezeigt. Die Werte der instabilen Punkte dieser niedrigsten periodischen Orbits sind in Tabelle F.1 des Anhangs F gegeben. Eine instabile Periode 3 existiert in diesem Attraktor nicht. Alle diese UPOs können stabilisiert werden, indem die Kontrolle als eine zusätzliche dynamische Variable $\underline{p}_{n+1} = \underline{p}_{n+1}(\underline{x}_n)$ behandelt wird, wobei die Verzögerung durch die Rückkopplung in den Kontrollalgorithmus einbezogen werden muß (Anhang F).



Abbildungung 8.1: Die Aktivitätendynamik $(x_n, y_n)^{tr}$ des Zweineuronenmoduls zeigt einen deterministisch chaotischen Attraktor (durch kleine Punkte dargestellt), in dem unendlich viele instabile periodische Orbits liegen. Die niedrigsten Perioden sind hier in ihrer Lage auf dem Attraktor dargestellt.

8.2.2 Einpunktkontrolle per Neuromodul

Es hat sich gezeigt, daß in dem von uns betrachteten Attraktor zumindest die niedrigsten Perioden stabilisiert werden können durch Anwendung des Kontrollsignals nur auf die Umgebung eines einzigen der periodischen Punkte. Wir nennen dies Einpunktkontrolle. Generell ist die Einpunktkontrolle immer dann möglich, wenn die aufsummierte Expansionsrate entlang der Periode geringer ist als die in dem einen zu kontrollierenden periodischen Punkt durch die Kontrolle zu erzielende Kontraktion.

Die Kontrolle \underline{p} , die algorithmisch gegeben ist durch Least-Squares-Minimierung der Abweichung zwischen aktueller Dynamik und Zieldynamik, d.h. dem periodischen Orbit, kann nun approximiert werden durch nur eine Schicht aus vier Neuronen $\underline{z} = (z_1, \dots, z_4)^{tr}$ für jede Kontrollregion. Die einzelnen Kontrollregionen sind durch die Forderung beschränkt, daß das lineare Kontrollsignal klein sein soll und außerhalb des durch \underline{p}^* begrenzten Kontrollbereiches zu Null abgeschnitten

wird durch eine Abschneidefunktion $\Phi_{p^*}(p)$. Diese ist definiert als

$$\Phi_{p^*}(p) := \begin{cases} p & \text{für } |p| < p^* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (8.2)$$

In Abbildung 8.2 ist das algorithmisch gegebene lineare Kontrollsignal gestrichelt dargestellt, seine Approximation mit den vier sigmoiden Neuronen als durchgezogene Linie. Eine genaue Approximation bei sehr kleinem Kontrollsignal $p \approx 0$ gewährleistet die Stabilisierung der exakten UPOs, während weit außerhalb der einzelnen Kontrollregion das Signal möglichst auf Null geht, um andere Kontrollregionen nicht zu stören.

Für eine Periode ist das gesamte selbstkontrollierende System gegeben durch

$$\begin{aligned} \underline{x}_{n+1} &= \underline{v} + W \cdot \sigma(\underline{x}_n) + V \cdot \sigma(\underline{z}_n) \\ \underline{z}_{n+1} &= \underline{\theta} + U \cdot \sigma(\underline{x}_n) \end{aligned} \quad (8.3)$$

mit $\underline{z} \in \mathbb{R}^4$ und den durch den Kontrollalgorithmus vollständig bestimmten Matrizen V , θ und U in folgender Struktur

$$V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_4 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ u_2 & 0 \\ u_3 & 0 \\ u_4 & 0 \end{pmatrix} \quad (8.4)$$

Die genauen Werte sind in Anhang F.4 berechnet.

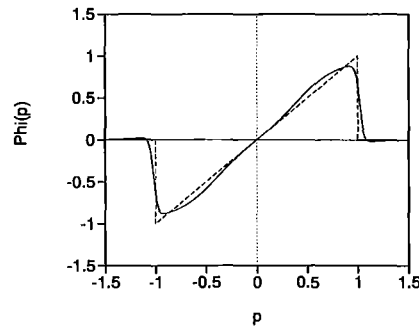


Abbildung 8.2: Die lineare und durch $\Phi(p)$ lokal begrenzte algorithmische Kontrolle p (gestrichelt) wird durch die Komposition von höchstens vier sigmoidalen Neuronen \underline{z} für die Einpunktkontrolle ausreichend approximiert (durchgezogene Linie).

8.2.3 Kontrolle mehrerer UPOs durch Überlagerung von Einpunktkontrollen

Zur Stabilisierung von N verschiedenen UPOs müssen wir entsprechend N Kontrollregionen einführen, die jeweils Einpunktkontrolle ermöglichen. Mit oberem Index $\nu = 1, \dots, N$ kann das gesamte System also geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \underline{x}_{n+1} &= \underline{v} + W \cdot \sigma(\underline{x}_n) + \sum_{\nu=1}^N V^\nu \cdot \sigma(\underline{z}_n^\nu) \\ \underline{z}_{n+1}^\nu &= \underline{\theta}^\nu + U^\nu \cdot \sigma(\underline{x}_n) \end{aligned} \quad (8.5)$$

Der Index ν bezeichnet hier z.B. die Perioden 2, 4 und 5.1, zwischen welchen im Weiteren geschaltet werden wird. Weiter bedeutet \underline{z}_n^ν die Aktivität der vier Neuronen eines Controllers $C(\nu)$. Für die Perioden ν muß gewährleistet sein, daß sich die Kontrollregionen nicht überlappen (siehe Abbildung 8.3).

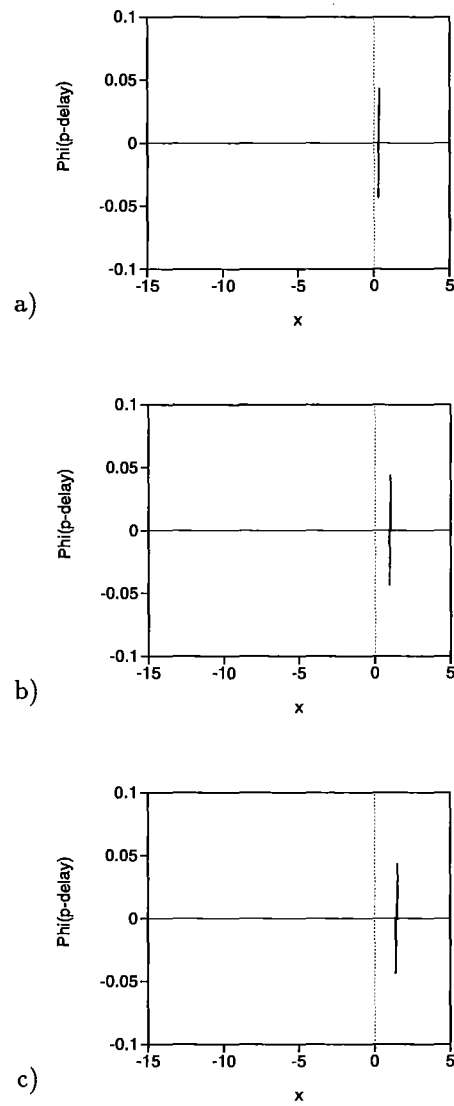


Abbildung 8.3: Kontrollregionen für a) Periode 2, b) Periode 4 und c) Periode 5.1. Die Regionen mit nichtverschwindendem Kontrollsignal überlappen sich nicht für die drei verschiedenen hier benutzten Perioden bei dem Begrenzungswert $p^* = 0,05$.

8.3 Schalten zwischen periodischen Attraktoren

8.3.1 Deterministisches Schalten per externem Eingabeprogramm

Die aufeinander folgende Aktivierung verschiedener Kontroller, ein Schaltprogramm genannt, wird bestimmt durch starke externe hemmende Eingaben \underline{I}_n^ν während einer vorgegebenen Anzahl von Zeitschritten. Dies wird wie folgt in die konsistente neuronale Selbstkontrolle einbezogen

$$\begin{aligned} \underline{x}_{n+1} &= \underline{\vartheta} + W \cdot \sigma(\underline{x}_n) + \sum_{\nu=1}^N V^\nu \cdot \sigma(\underline{z}_n^\nu) \\ \underline{z}_{n+1}^\nu &= \underline{\vartheta}^\nu + U^\nu \cdot \sigma(\underline{x}_n) + \underline{I}_n^\nu \end{aligned} \quad (8.6)$$

Wir starten mit einer konstanten Hemmung (*inhibition*) \underline{I}_n^ν für jedes Neuron aller Kontroller, lassen also die chaotische Dynamik sich frei entwickeln. Zur Kontrolle eines spezifischen periodischen Orbits ν wird der entsprechende Kontroller $C(\nu)$ enthemmt. In Abbildung 8.4 ist eine Zeitreihe abgebildet, in der für je 2000 Zeitschritte n jeweils ein Kontroller aktiviert ist, zuerst der für Periode 2, dann 4 und schließlich 5.1. Nach jeweils kurzer Transiente auf dem chaotischen Attraktor wird die jeweilige Periode stabilisiert. Diese Methode nennen wir **deterministisches Schalten durch externe Eingaben**.

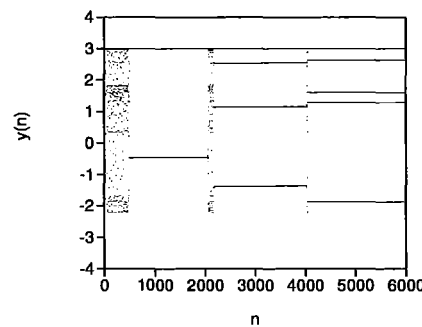


Abbildung 8.4: Beispielhafte Zeitreihe für das deterministische Schalten durch externe Eingaben. Gezeigt ist die y -Zeitreihe des kontrollierten Zweineuronenmoduls.

8.3.2 Spontanes Schalten mittels Rauschen

Wir beschreiben nun eine andere Möglichkeit des Schaltens, nämlich das **spontane Schalten durch dynamisches Rauschen**: Wenn alle drei Kontroller $C(2)$, $C(4)$ und $C(5.1)$ gleichzeitig aktiviert sind, also ohne äußere Hemmung, dann wird das System nach einer kurzen Transiente auf dem chaotischen Attraktor in eine der Kontrollregionen fallen und dort ewig stabilisiert werden.

Sobald ein dynamischer Rauschterm ξ_n (entweder durch internes Rauschen der Neuronen oder durch hochdimensionale externe Störfreiheitsgrade verursacht) in das chaotische Untermodul eingeführt wird, kann das System von dem einmal kontrollierten Orbit wieder entfliehen und sich entlang des chaotischen Attraktors bewegen, bis es eventuell in einer der anderen Kontrollregionen gefangen wird. Dieser neue periodische Orbit wird später wieder durch das Rauschen destabilisiert und so weiter. Das gesamte System, welches dieses spontane Schalten zeigt, lässt sich wie

folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \underline{x}_{n+1} &= \underline{v} + W \cdot \sigma(\underline{x}_n) + \sum_{\nu=1}^N V^{\nu} \cdot \sigma(\underline{z}_n^{\nu}) + \underline{\xi}_n \\ \underline{z}_{n+1}^{\nu} &= \underline{\theta}^{\nu} + U^{\nu} \cdot \sigma(\underline{x}_n) \end{aligned} \quad (8.7)$$

Der einfachste Rauschtyp, d.h. Gaußsches weißes Rauschen mit konstanter Varianz, reicht schon aus, um das spontane Schalten zwischen Orbits der Periode zwei, vier und fünf zu realisieren.

In Abbildung 8.5 ist ein Zeitreihenausschnitt zu sehen, in dem alle drei Orbits jeweils für kurze Zeit besucht werden, bevor sie durch das Rauschen wieder destabilisieren. Obwohl jede Periode nur durch Einpunktkontrolle stabilisiert wird, ist die längste Periode fünf die am häufigsten aufgesuchte, eventuell durch das Rauschen destabilisiert und nach kurzer Transiente wieder erreicht (siehe Abbildung 8.5 zu den Zeiten $n = 5000$ bis ca. 5600). Dann allerdings wird der Periode-4-Orbit getroffen und kann für ungefähr 400 Zeitschritte stabilisiert werden. Es folgt wieder ein Abschnitt mit stabilisierter Periode 5. Schließlich besucht das System ab etwa Zeitschritt 6600 sogar den Periode-2-Orbit.

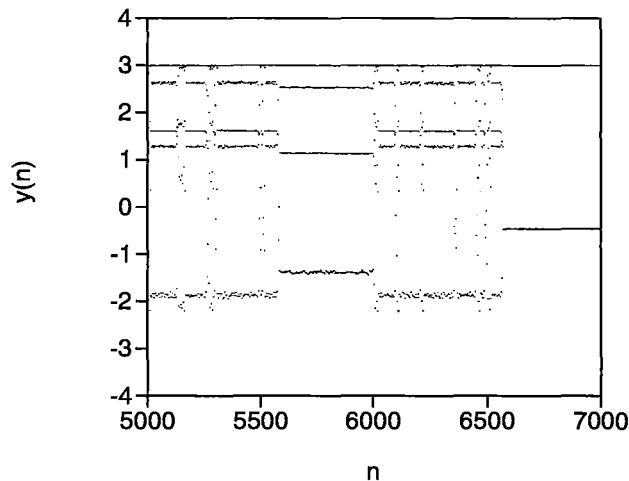


Abbildung 8.5: Zeitreihe mit spontanem Schalten zwischen den verschiedenen periodischen Orbits durch dynamisches Rauschen im chaotischen Untermodul.

Die Verweildauern in den verschiedenen Perioden können durch Variation der in unseren bisherigen Simulationen gleich gehaltenen Größen der verschiedenen Kontrollregionen beeinflusst werden. Wie in Abschnitt 8.1 bereits angesprochen, ist besonders die letztere Variante des spontanen Schaltens von besonderem Interesse für weitere Untersuchungen.

8.4 Diskussion, Implikationen für die Hirn- und Kognitionsforschung

Wir haben ein selbstkonsistentes Neuromodul vorgestellt, das durch den Mechanismus der Chaoskontrolle ein Schalten zwischen verschiedenen dynamischen Mustern erlaubt. Hier werden aus den instabilen Perioden eines chaotischen Attraktors stabilisierte periodische Attraktoren, die über das deterministische Chaos miteinander verbunden und somit dem System leicht zugänglich sind.

Zwei Varianten des Schaltens werden unterschieden und an einer Implementierung erläutert. Die Prinzipien haben, wie in Abschnitt 8.1 erklärt, weite An-

knüpfungspunkte an die zur Zeit intensiv geführte Diskussion um die Relevanz chaotischer Dynamik in biologischer und artifizieller Informationsverarbeitung. Hier ist die Chaoskontrolle als eine in der Physik erst in den letzten sechs Jahren entwickelte Methode sicher noch nicht an die Grenzen ihrer Anwendbarkeit gestoßen, sowohl als Paradigma der Informationsverarbeitung als auch als technische Möglichkeit zum Eingriff in biologische Netzwerke (siehe die Diskussion in Kapitel 6).

Ein bisher noch ganz ausgeklammerter Aspekt ist die Lernbarkeit neuronaler Selbstkontrolle. Als für rekurrente Netze adäquater Lernmechanismus bieten sich koevolutionäre Strategien an, wie neuerdings untersucht (Pasemann 1996(b,c))¹³ [86, 84]. Die Anwendung der Koevolution auf das hier beschriebene **Schalten zwischen periodischen Dynamiken unter Verbindung durch einen chaotischen Attraktor** kann ganz andere Lösungen geben als die bis jetzt von uns untersuchte Schaltmaschine bestehend aus chaotischem Untermodul und separaten Kontrolleruntermodulen für die verschiedenen Perioden. Mit unserer speziellen Schaltmaschine kennen wir allerdings schon eine funktionierende Lösung des generellen Schaltproblems in allen Einzelteilen. Sie liefert uns insbesondere Obergrenzen für die notwendige Anzahl von Neuronen und Verbindungen.

Das hier vorgestellte Attraktornetz kann als Alternative zu den schon als klassisch zu bezeichnenden Punktattraktornetzen nach Hopfield (1982) [78] betrachtet werden. Das Neue sind die koexistierenden periodischen Attraktoren, die aus einem einzigen chaotischen Attraktor durch Stabilisierung mittels Chaoskontrolle gewonnen wurden, im Gegensatz zu den koexistierenden Punktattraktoren in den Hopfieldnetzen.

¹³Pasemann, F. (1996(b)) Repräsentation ohne Repräsentation. in: *Interne Repräsentationen* eds. Rush, G., Schmidt, S.J., Breidbach, O. (Suhrkamp, Frankfurt).

Teil IV

Anhänge

Anhang A

Poisson-Prozesse

Wir beschreiben hier die Grundannahmen des Poisson-Prozesses und leiten daraus die Exponentialverteilung als Verteilung der Interereignis-Intervalle ab, so wie einige weitere mit diesem Prozeß verbundene Verteilungen, die Poisson-Verteilung selbst, die dem Prozeß ihren Namen gibt, so wie die Erlang-k-Verteilungen als ein verbindendes Glied. Im zweiten Teil zeigen wir, wie in der Exponentialverteilung der Parameter a aus einer gegebenen Datenreihe geschätzt werden kann mittels eines Maximum-Likelihood-Prinzips.

A.1 Verteilungen

Sei p die Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis im Zeitintervall Δt . Für kleiner werdendes Δt wird auch p kleiner werden bis für ausreichend kleines Δt das Verhältnis $a := p/\Delta t$ konstant bleibt. Für kleines p bleibt auch das Gesamtintervall zwischen zwei Ereignissen x konstant mit kleiner werdendem Δt , also $x := \phi \cdot \Delta t$ mit ϕ der Anzahl der Intervalle Δt , nach der das Ereignis stattfindet.

Für ein Ereignis nach genau ϕ Schritten ist die Wahrscheinlichkeit $\tilde{p}(\phi)$ gegeben durch die Pascal oder geometrische Verteilung

$$\tilde{p}(\phi) = p \cdot (1 - p)^{\phi-1} \quad (\text{A.1})$$

und bei Einsetzen der obigen Definitionen:

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\phi) &= p \cdot (1 - p)^{\phi-1} \\ &= a \cdot \Delta t \cdot (1 - a \cdot \Delta t)^{\phi-1} \\ &= a \cdot \left(1 + \frac{-a \cdot x}{\phi}\right)^{\phi-1} \cdot \Delta t \\ &\rightarrow a \cdot e^{-ax} \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

für $\phi \rightarrow \infty$

$$= p(x) dt$$

Also ist die Verteilung im Grenzübergang $\Delta t \rightarrow \infty$ die Exponentialverteilung

$$p(x) = a \cdot e^{-ax} \quad , \quad (\text{A.3})$$

woraus auch sofort die Verteilungsfunktion berechnet werden kann:

$$\begin{aligned}
 P(x_e) &:= \int_0^{x_e} p(x) dx \\
 &= \int_0^{x_e} a e^{-ax} dx = [-e^{-ax}]_0^{x_e} \\
 &= 1 - e^{-ax_e},
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

wie sie als TDF im Kolmogorov-Smirnov-Test des Kapitels 5 benutzt wird.

Auch für mehr als eine stochastisch unabhängige Quelle von Ereignissen mit Ereigniswahrscheinlichkeiten pro Zeit a und b ist die Exponentialverteilung immer noch gültig, nun mit Ereigniswahrscheinlichkeit pro Zeit $A = a + b$. Seien zwei Quellen gegeben mit Wahrscheinlichkeiten p und q pro Zeitintervall Δt , also auch Ereigniswahrscheinlichkeiten pro Zeit $a := p/\Delta t$ und $b := q/\Delta t$. Es folgt

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}(\phi) &= p(1-p)^{\phi-1} \cdot (1-q)^{\phi} + q(1-q)^{\phi-1} \cdot (1-p)^{\phi} + pq(1-p)^{\phi-1}(1-q)^{\phi-1} \\
 &= a\Delta t \cdot (1 + \frac{-a \cdot x}{\phi})^{\phi-1} (1 + \frac{-b \cdot x}{\phi})^{\phi} + b\Delta t \cdot (1 + \frac{-b \cdot x}{\phi})^{\phi-1} (1 + \frac{-a \cdot x}{\phi})^{\phi} \\
 &\quad + a\Delta t \cdot b\Delta t (1 + \frac{-a \cdot x}{\phi})^{\phi-1} (1 + \frac{-b \cdot x}{\phi})^{\phi-1} \\
 &\rightarrow ae^{-ax} e^{-bd \cdot dt} + be^{-bx} e^{-ax \cdot dt} + abe^{-ax} e^{-bx \cdot dt} \cdot (dt)^2 \\
 &\quad \text{für } \phi \rightarrow \infty \\
 &= (a+b)e^{-(a+b) \cdot x} dt + \mathcal{O}(dt^2) \approx p_A(x)dt.
 \end{aligned}$$

Dies ergibt wieder eine Exponentialverteilung $p_A(x) = Ae^{-Ax}$ mit der Summe der verschiedenen involvierten Prozesse $A = a + b$.

Obiges Konzept für die Wahrscheinlichkeit eines Zeitintervalles der Länge x zwischen zwei Ereignissen kann leicht verallgemeinert werden auf Intervalle zwischen Ereignis Eins und Drei, wobei das zweite Ereignis irgendwo zwischen Eins und Drei liegt, entsprechend auch für $(k-1)$ Ereignisse zwischen zwei Ereignissen. Wir erhalten als eine Generalisierung der Pascal-Verteilung die Pascal-k-Verteilung

$$\tilde{p}_k(\phi) = \binom{\phi-1}{k-1} p^k (1-p)^{\phi-k} \tag{A.5}$$

mit Binomialkoeffizienten wie in Gleichung 5.3 definiert.

Die Pascal-k-Verteilung kann beschrieben werden als eine Binomialverteilung $p_B(\phi-1, k-1)$, in der egal ist, wann die $(k-1)$ Ereignisse stattfinden während der $(\phi-1)$ Intervalle Δt , und das k -te folgt im ϕ -ten Intervall, d.h.

$$\begin{aligned}
 \tilde{p}_k(x) &= p \cdot p_B(\phi-1, k-1) \\
 &= p \cdot \binom{\phi-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(\phi-1)-(k-1)} \\
 &\rightarrow a \frac{(ax)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-ax} \cdot dt \\
 &\quad \text{für } \phi \rightarrow \infty, \lambda := ax = \text{konst.} \\
 &= p_k(x) \cdot dt,
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

wodurch wir die Erlang- k -Verteilung $p_k(x)$ (Honerkamp, 1990) [135] erhalten. Wir werden in Gleichung A.11 zeigen, daß die Binomialverteilung gegen folgenden Ausdruck konvergiert

$$p_B(\mu, k) \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (\text{A.7})$$

mit $\lambda := p \cdot \mu$. Also

$$p_B(\phi - 1, k - 1) \rightarrow \frac{(p \cdot (\phi - 1))^{k-1}}{(k-1)!} e^{-p(\phi-1)} \quad (\text{A.8})$$

und mit $a = p/\Delta t$, $x = \phi \cdot \Delta t$, also $p\phi = ax$ und $\phi \rightarrow \infty$, d.h. $(\phi - 1) \rightarrow \phi$, ist schließlich Gleichung A.6 gezeigt.

Die bisherigen Verteilungen sind durch ihr natürliches Verhalten vollständig in ihren Parametern definiert. Wir sehen nun, daß für weitere Charakteristika wir zusätzliche Parameter vordefinieren müssen. Für die Herleitung der Poissonverteilung ist dies ein **Binning-Intervall** $\Delta T := \mu \cdot \Delta t$, in dem k Ereignisse stattfinden, egal wann innerhalb ΔT . Die zugehörige Wahrscheinlichkeit ist natürlich die Binomialverteilung selbst

$$p_B(\mu, k) = \binom{\mu}{k} p^k (1-p)^{\mu-k} \quad (\text{A.9})$$

Für kleine $\Delta t \rightarrow 0$ und also $\mu = \Delta T/\Delta t \rightarrow \infty$ und kleines $p = a \cdot \Delta t \rightarrow 0$, aber konstanten Mittelwert

$$\lambda := \langle k \rangle = \sum_{k=0}^{\mu} k \cdot p_B(\mu, k) = \mu \cdot p \quad (\text{A.10})$$

wobei mit obigen Definitionen gilt

$$\lambda = \mu \cdot p = \frac{\Delta T}{\Delta t} \cdot (a \cdot \Delta t) = \Delta T \cdot a = \text{konst.} \quad ,$$

approximiert die Binomialverteilung $p_B(\mu, k)$ die Poisson-Verteilung $p_\lambda(k)$, beachte $p = \lambda/\mu$:

$$\begin{aligned} p_B(\mu, k) &= \binom{\mu}{k} p^k (1-p)^{\mu-k} \\ &= \frac{1}{k!} \frac{\mu!}{(\mu-k)!} \frac{p^k}{(1-p)^k} (1-p)^\mu \\ &= \frac{1}{k!} \frac{\mu!}{(\mu-k)!} \left(\frac{1}{\mu}\right)^k \underbrace{\frac{1}{(1-p)^k}}_{\rightarrow 1} \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^\mu}_{\rightarrow e^{-\lambda}} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

für $p \rightarrow 0$ und für $\mu \rightarrow \infty$

$$\rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\frac{\mu \cdot (\mu-1) \cdot \dots \cdot (\mu-k+1)}{\mu \cdot \mu \cdot \dots \cdot \mu}}_{\rightarrow 1}$$

für festes k und $\mu \rightarrow \infty$

$$\rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = p_\lambda(k)$$

mit $\lambda = \mu \cdot p = \Delta T \cdot a$ ebenfalls Mittelwert der Poisson-Verteilung und jetzt auch deren Varianz. Für die Binomialverteilung ist die Varianz $\sigma^2 = \mu p \cdot (1-p)$.

A.2 Parameterschätzung

Wir geben nun die Schätzung des Parameters a aus dem Maximum der Loglikelihoodfunktion $\ln(L(a))$ an, die wie folgt definiert ist: Die Verbundwahrscheinlichkeit dafür, daß man x_1 bis x_N als Realisierungen der Zufallsvariablen Intervall-Intervalle X_1 bis X_N bei einer Zeitreihe erhält, ist gleich dem Produkt der stochastisch unabhängigen Einzelverteilungen

$$p(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_N = x_N) = \prod_{i=1}^N p(x_i) = \prod_{i=1}^N a e^{-ax_i} =: L(a) \quad . \quad (\text{A.12})$$

Diese Verbundwahrscheinlichkeit fassen wir als eine Funktion des Parameters a auf und nennen sie Likelihood-Funktion $L(a)$.

Wir suchen nun dasjenige a , so daß das Ergebnis unseres Experiments (x_1, \dots, x_N) das wahrscheinlichste ist, also $p(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_N = x_N)$ maximal. Da die Logarithmusfunktion monoton steigend ist auf dem Intervall $[0,1]$, können wir auch die Funktion $\ln(L(a))$ nach a maximieren statt $L(a)$ selbst, also

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial a} (\ln(L(a))) \\ &= \frac{\partial}{\partial a} \left(\ln \left(\prod_{i=1}^N a e^{-ax_i} \right) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial a} \left(\ln(a^N) + \ln(e^{-a \sum_{i=1}^N x_i}) \right) \\ &= N \frac{\partial}{\partial a} (\ln(a)) + \frac{\partial}{\partial a} \left(-a \sum_{i=1}^N x_i \right) \\ &= N \cdot \frac{1}{a} - \sum_{i=1}^N x_i \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

also

$$a = \frac{1}{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right)} \quad . \quad (\text{A.14})$$

Also ist der Parameter a tatsächlich das Inverse des Mittelwertes der Interereignis-Intervalle x_i , wie in Kapitel 5 benutzt.

Anhang B

Explizite Berechnung des AR(1)-Modells

Das AR(1)-Modell wird auch als zeitdiskrete Version des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses bezeichnet. Für den zeitdiskreten linearen dynamischen Prozeß

$$x_{n+1} = a x_n + b \varepsilon_n \quad (\text{B.1})$$

mit Parametern a und b und mit unabhängigem Gaußnormalem Rauschen ε_n mit

$$p(\varepsilon_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\varepsilon_n)^2} \quad (\text{B.2})$$

und stochastischer Unabhängigkeit, d.h.

$$p(\varepsilon_n, \varepsilon_{n+k}) = p(\varepsilon_n) \cdot p(\varepsilon_{n+k}) \quad (\text{B.3})$$

für alle Zeiten n und k werden wir zeigen:

- Stationäre Verteilung $p^*(x_n)$

Die stationäre Verteilung ist wieder eine Gaußverteilung mit einer geänderten Varianz:

$$\sigma_x^2 = \frac{b^2}{1 - a^2} \quad (\text{B.4})$$

in Abhängigkeit von Varianz des Rauschens $b^2 = \sigma_\varepsilon^2$ und Dissipation a .

- Verbundwahrscheinlichkeit im stationären Fall

Die Verbundwahrscheinlichkeit $p(x_{n+k}, x_n)$ ist nicht mehr stochastisch unabhängig, sondern enthält einen Mischterm. Die Verbundwahrscheinlichkeit ist symmetrisch in ihren Variablen

$$p(x_{n+k}, x_n) = p(x_n, x_{n+k}) \quad (\text{B.5})$$

also zeitreversibel, was im Allgemeinen nicht für nichtlineare Dynamik $x_{n+1} = f(x_n, \varepsilon_n)$ gilt, also als Nichtlinearitätstest herangezogen werden kann.¹

- Autokorrelationsfunktion im stationären Fall

Der Mittelwert der Autokorrelationsfunktion ist

$$\frac{1}{\sigma_x} < x_{n+k} \cdot x_n > = a^k \quad (\text{B.6})$$

¹Diks, C., van Houwelingen, J.C., Takens, F. & DeGoede, J. (1995) [39] Reversibility as a criterion for discriminating time series, *Physics Letters A* **201**, 221–228.

Mit der deterministischen Dynamik $x_{n+1} = ax_n + b\varepsilon_n =: f(x_n, \varepsilon_n)$ bei vorgegebenem Rauschen folgt aus der Verteilung für x_n und ε_n diejenige für x_{n+1} mit der Perron-Frobenius-Zeitentwicklungsgleichung: Zunächst ist die Gleichung für die Marginalverteilung $p(x_{n+1})$ aus der Verbundwahrscheinlichkeit $p(x_{n+1}, x_n, \varepsilon_n)$ gegeben durch

$$p(x_{n+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x_{n+1}, x_n, \varepsilon_n) dx_n d\varepsilon_n \quad (\text{B.7})$$

und nach Bayes läßt sich die Verbundwahrscheinlichkeit als Produkt mit bedingten Wahrscheinlichkeiten ausdrücken

$$p(x_{n+1}, x_n, \varepsilon_n) = p(x_{n+1}|x_n, \varepsilon_n) \cdot p(x_n, \varepsilon_n) \quad (\text{B.8})$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit, hier eine Übergangswahrscheinlichkeit der Dynamik B.1, ist durch die Deltafunktion gegeben

$$p(x_{n+1}|x_n, \varepsilon_n) = \delta(x_{n+1} - f(x_n, \varepsilon_n)) \quad (\text{B.9})$$

da aus der Kenntnis von x_n und ε_n genau x_{n+1} folgt. Weiter ist das Rauschen ε_n stochastisch unabhängig vom Zustand x_n , d.h.

$$p(x_n, \varepsilon_n) = p(x_n) \cdot p(\varepsilon_n) \quad (\text{B.10})$$

Hieraus folgt nun die Zeitentwicklungsgleichung der Dynamik $x_{n+1} = f(x_n, \varepsilon_n)$, also die Perron-Frobenius-Gleichung für die Verteilung $p_n(x_n)$

$$p_{n+1}(x_{n+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_{n+1} - f(x_n, \varepsilon_n)) p_n(x_n) \cdot p_\varepsilon(\varepsilon_n) dx_n d\varepsilon_n \quad (\text{B.11})$$

Wir schreiben hier den Zeitindex sowohl an den Zustand, um die Integrationsvariablen x_n und x_{n+1} zu unterscheiden, als auch an die Verteilung, da die Funktionen $p_n(x)$ und $p_{n+1}(x)$ verschiedene Ausdrücke in x sind. Wir haben bereits angenommen, daß beim Rauschen für jeden Zeitschritt dieselbe Funktion $p_\varepsilon(\varepsilon_n)$, nämlich die Gaußfunktion gilt.

Aus einer vorgegebenen Anfangsverteilung $p_0(x_0)$ und der Verteilung des Rauschens zu jedem Zeitschritt $p_\varepsilon(\varepsilon_n)$ folgt die Verteilung zu jedem Zeitpunkt $n \in \mathbb{N}$ mit $p_n(x_n)$. Wenn die Dynamik gegen eine stationäre Verteilung $p^*(x_n)$ läuft

$$p_n(x_n) \longrightarrow p^*(x_n) \quad (\text{B.12})$$

dann wird aus der Zeitentwicklung der Verteilung eine Fixpunktgleichung für die stationäre Verteilung $p^*(x_n)$

$$p^*(x_{n+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_{n+1} - f(x_n, \varepsilon_n)) p^*(x_n) \cdot p_\varepsilon(\varepsilon_n) dx_n d\varepsilon_n \quad (\text{B.13})$$

mit derselben Funktion $p^*(x_{n+1}) = p^*(x_n)$, wobei die Integrationsvariablen x_n und x_{n+1} weiterhin zu unterscheiden sind. In Operatorform geschrieben ist Gleichung B.13 auch $p^* = Pp^*$ für den Perron-Frobenius-Operator P und Eigenzustand p^* zum Eigenwert 1.

Insbesondere werden Punkte x_n auch in der stationären Verteilung noch durch die Dynamik in Punkte x_{n+1} umgruppiert, wo in der rein deterministischen Gleichung $x_{n+1} = ax_n$ ohne Rauschen eventuell ein dynamischer Fixpunkt x^* mit $x^* = f(x^*)$ angenommen wird. Dies haben stochastische Systeme mit deterministisch chaotischen gemeinsam, weswegen wir auch in Anhang C denselben Formalismus benutzen können.

B.1 Stationäre Verteilung

Wir führen zunächst eine vereinfachende Schreibweise für die Gaußverteilung ein

$$p_{\mu,\sigma}(x) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{B.14})$$

mit den Indizes μ des Mittelwertes und σ der Standardabweichung und geben damit folgende Rechenregeln für Gaußverteilungen an:

1. $p_{\mu,\sigma}(-x) = p_{(-\mu),\sigma}(x)$
2. $p_{\mu,\sigma}(\alpha x + \beta) = \frac{1}{\alpha} p_{\frac{1}{\alpha}(\mu-\beta), \frac{1}{\alpha}\sigma}(x)$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} p_{\mu,\sigma}(x) \cdot p_{\varphi,\omega}(x-y) dx = p_{(\mu-\varphi), \sqrt{\sigma^2+\omega^2}}(y)$

Die Hauptschwierigkeit liegt in Regel 3, die mit quadratischer Ergänzung im Exponenten der Gaußverteilung gelöst werden muß.

Damit ist als erstes zu sehen, daß b die Standardabweichung des Rauschens in $x_{n+1} = ax_n + b\varepsilon_n$ ist mit ε_n Gaußnormal, d.h. $p_{0,1}(\varepsilon_n)$. Betrachte $\xi_n := b\varepsilon_n$ mit Verteilung

$$p_{\mu,\sigma}(\xi) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

und

$$\begin{aligned} p_{0,1}(\varepsilon_n) d\varepsilon_n &= p_{\mu,\sigma}(\xi_n) d\xi_n \\ &= p_{\mu,\sigma}(b\varepsilon_n) d(b\varepsilon_n) \\ &= \frac{1}{b} p_{(\mu/b), (\sigma/b)}(\varepsilon_n) \underbrace{\frac{d(b\varepsilon_n)}{d\varepsilon_n}}_{=b} d\varepsilon_n \\ &= p_{(\mu/b), (\sigma/b)}(\varepsilon_n) d\varepsilon_n \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

wobei Rechenregel 2 benutzt wurde. Also sind bei Vergleich beider Seiten Mittelwert $0 = (\mu/b)$ und Standardabweichung $1 = (\sigma/b)$. Also hat $\xi_n = b\varepsilon_n$ Mittelwert $\mu = 0$ und Standardabweichung $\sigma = b$. Damit ist b^2 tatsächlich die Varianz des Rauschens in der Dynamik $x_{n+1} = ax_n + b\varepsilon_n$.

Wir berechnen nun die stationäre Verteilung durch die Perron-Frobenius-Fixpunktgleichung B.13. Als ersten Schritt nehmen wir die Integration über das Rauschen vor. Hierzu muß in der Deltafunktion der Übergangswahrscheinlichkeit die Dynamik $x_{n+1} = f(x_n, \varepsilon_n)$ nach ε_n aufgelöst werden, was im Falle unserer linearen Dynamik einfach ist, im Allgemeinen aber den Grund für analytische Probleme darstellt. Es ist

$$\begin{aligned} p^*(x_{n+1}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_{n+1} - f(x_n, \varepsilon_n)) p^*(x_n) \cdot p_\varepsilon(\varepsilon_n) dx_n d\varepsilon_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} p^*(x_n) \cdot \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_{n+1} - a x_n - b \varepsilon_n) \cdot p_\varepsilon(\varepsilon_n) d\varepsilon_n \right)}_{=: I} dx_n \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Weiter ist $p_\varepsilon(\varepsilon_n) = p_{0,1}(\varepsilon_n)$ das Rauschen Gaußnormal verteilt und mit Gleichung B.15 $p_{0,1}(\varepsilon_n) d\varepsilon_n = p_{0,b}(b\varepsilon_n) d(b\varepsilon_n)$. Das Integral in der Klammer von Gleichung B.16 ist also

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(b\varepsilon_n - (x_{n+1} - ax_n)) p_{0,b}(b\varepsilon_n) d(b\varepsilon_n) \\ &= p_{0,b}(x_{n+1} - ax_n) \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

per Integration über $(b\varepsilon_n)$ mit der Deltafunktion. Also ist die Fixpunktgleichung für p^*

$$p^*(x_{n+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p^*(x_n) \cdot I \, dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} p_{0,b}(x_{n+1} - ax_n) p^*(x_n) \, dx_n \quad (\text{B.18})$$

Diese Gleichung B.18 hat genau die Form der Rechenregel 3, wenn man für p^* eine Gaußverteilung annimmt. Wir setzen also

$$p^*(x_n) := \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n)^2}{2\sigma_x^2}} = p_{0,\sigma_x}(x_n) \quad , \quad (\text{B.19})$$

mit noch zu bestimmender Varianz σ_x .

Damit wird aus der Fixpunktgleichung

$$\begin{aligned} p_{0,\sigma_x}(x_{n+1}) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{0,b}(x_{n+1} - ax_n) \cdot p_{0,\sigma_x}(x_n) \, dx_n \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} p_{0,\sigma_x} \cdot p_{0,\frac{b}{a}}\left(x_n - \frac{1}{a}x_{n+1}\right) \, dx_n \\ &= \frac{1}{a} p_{0,\sqrt{\sigma_x^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}}\left(\frac{1}{a}x_{n+1}\right) \\ &= p_{0,\sqrt{(a\sigma_x)^2 + b^2}}(x_{n+1}) \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Also lautet das Gesamtergebnis der Rechnung $p^* = Pp^*$ recht einfach

$$p_{0,\sigma_x}(x_{n+1}) = p_{0,\sqrt{(a\sigma_x)^2 + b^2}}(x_{n+1}) \quad , \quad (\text{B.21})$$

was den Zusammenhang zwischen σ_x , a und b bei Vergleich der Standardabweichungen auf beiden Seiten der Gleichung liefert:

$$\sigma_x = \sqrt{(a\sigma_x)^2 + b^2}$$

oder

$$\sigma_x^2 = \frac{b^2}{1 - a^2} \quad (\text{B.22})$$

mit $\sigma_x^2 = \langle x_n^2 \rangle$, der Varianz des Signals, und $b^2 = \langle \xi_n^2 \rangle$, der Varianz des Rauschens, so wie der Dissipation a der Dynamik $x_{n+1} = ax_n$. Also gilt in der stationären Verteilung ein **Ausgleich** zwischen der **Expansion** durch die **Fluktuationen** und **Kontraktion** durch die **Dynamik**.

Man sieht auch die Grenzen der Beschreibung der stationären Verteilung: Ist in Gleichung B.22 nämlich $a \in (-1, 1)$, so kann σ_x als reelle Standardabweichung betrachtet werden. Ist a außerhalb des Intervalles, so wird σ_x imaginär, also nicht mehr als Standardabweichung interpretierbar. Für Anfangsverteilungen fließt die Verteilung in der Zeitentwicklung auseinander, da die Dynamik $x_{n+1} = ax_n$ instabil ist, und erreicht nie eine stationäre Verteilung, da alle Startwerte gegen Unendlich oder Minus Unendlich gehen.

B.2 Die Verbundwahrscheinlichkeit im stationären Fall

Ziel ist nun die Berechnung der Verbundwahrscheinlichkeit $p(x_{n+k}, x_n)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dazu berechnen wir erst für $k = 1$, daraus für $k = 2$ und leiten hieraus für beliebige k einen Ausdruck her, der nun leicht per vollständiger Induktion bewiesen werden kann.

Für $k = 1$ ist

$$\begin{aligned}
 p(x_{n+1}, x_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x_{n+1}, x_n, \varepsilon_n) d\varepsilon_n \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x_{n+1}|x_n, \varepsilon_n) \cdot p(x_n, \varepsilon_n) d\varepsilon_n \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_{n+1} - f(x_n, \varepsilon_n)) \cdot p^*(x_n) \cdot p(\varepsilon_n) d\varepsilon_n \\
 &= p^*(x_n) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_{n+1} - ax_n - b\varepsilon_n) \cdot p(\varepsilon_n) d\varepsilon_n \\
 &= p^*(x_n) \cdot p_{0,b}(ax_n - x_{n+1}) \\
 &= p_{0,\sigma_x}(x_n) \cdot p_{0,\sigma_x\sqrt{1-a^2}}(ax_n - x_{n+1}) \\
 &= \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_n)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_x\sqrt{1-a^2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(ax_n - x_{n+1})^2}{2\sigma_x^2(1-a^2)^2}} \\
 &= \left(\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_x^2(1-a^2)}(x_n^2 - 2ax_nx_{n+1} + x_{n+1}^2)} \\
 &= A_{k=1} e^{-\frac{1}{B_{k=1}}(x_n^2 - 2ax_nx_{n+1} + x_{n+1}^2)}
 \end{aligned} \tag{B.23}$$

mit

$$A_{k=1} := \left(\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \quad \text{und} \quad B_{k=1} := 2\sigma_x^2(1-a^2) \quad .$$

Entsprechend gilt für $k = 2$

$$\begin{aligned}
 p(x_{n+2}, x_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x_{n+2}, x_{n+1}, x_n) dx_{n+1} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x_{n+2}|x_{n+1}, x_n) \cdot p(x_{n+1}, x_n) dx_{n+1} \quad ,
 \end{aligned} \tag{B.24}$$

wobei $p(x_{n+1}, x_n)$ gerade für $k = 1$ berechnet wurde und x_{n+2} aus der Dynamik mit Kenntnis von x_{n+1} (und allen ε_{n+1}) bestimmbar ist, ohne von x_n abzuhängen:

$$\begin{aligned}
 p(x_{n+2}|x_{n+1}, x_n) &= p(x_{n+2}|x_{n+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_{n+2}|x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) \cdot p_{0,1}(\varepsilon_{n+1}) d\varepsilon_{n+1} \\
 &= p_{0,b}(x_{n+2} - ax_{n+1}) \quad .
 \end{aligned}$$

Also insgesamt

$$\begin{aligned}
p(x_{n+2}, x_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} p_{0,b}(x_{n+2} - ax_{n+1}) \cdot p_{0,\sigma_x}(x_n) p_{0,b}(ax_n - x_{n+1}) dx_{n+1} \\
&= p_{0,\sigma_x}(x_n) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} p_{\frac{1}{a}x_{n+2}, \frac{b}{a}}(x_{n+1}) p_{0,b}(x_{n+1} - ax_n) dx_{n+1} \\
&= p_{0,\sigma_x}(x_n) \cdot \frac{1}{a} p_{\frac{1}{a}x_{n+2}, \sqrt{(\frac{b}{a})^2 + b^2}}(ax_n) \\
&= p_{0,\sigma_x}(x_n) \cdot p_{a^2x_n, \sigma_x\sqrt{1-a^4}}(x_{n+2}) \\
&= \left(\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-a^4}} e^{-\frac{1}{2\sigma_x^2(1-a^4)}(x_n^2 - 2a^2x_nx_{n+2} + x_{n+2}^2)}
\end{aligned}$$

mit

$$A_{k=2} := \left(\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-a^4}} \quad \text{und} \quad B_{k=2} := 2\sigma_x^2(1-a^4) \quad .$$

Für beliebiges k kann hieraus behauptet werden

$$\begin{aligned}
p(x_{n+k}, x_n) &= A_k e^{-\frac{1}{B_k}(x_n^2 - 2a^kx_nx_{n+k} + x_{n+k}^2)} \\
&= p_{0,\sigma_x}(x_n) \cdot p_{a^kx_n, \sigma_x\sqrt{1-a^{2k}}}(x_{n+k})
\end{aligned} \tag{B.25}$$

mit

$$A_k := \left(\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \right)^2 \frac{1}{\sqrt{1-a^{2k}}} \quad \text{und} \quad B_k := 2\sigma_x^2(1-a^{2k}) \quad . \tag{B.26}$$

Der Beweis für allgemeines k wird per vollständiger Induktion durchgeführt. Die Induktionsvoraussetzung für $k = 1$ ist oben schon gezeigt. Bleibt der Induktionsschluß für $p(x_{n+(k+1)}, x_n)$ aus $p(x_{n+k}, x_n)$. Wir haben schon gesehen, wie aus $k = 1$ die Rechnung für $k = 2$ folgt und nutzen dies im Folgenden. Es ist

$$\begin{aligned}
p(x_{n+(k+1)}, x_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x_{n+k+1}, x_{n+k}, x_n) dx_{n+k} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} p(x_{n+k+1}|x_{n+k}, x_n) \cdot p(x_{n+k}, x_n) dx_{n+k} \quad ,
\end{aligned} \tag{B.27}$$

wobei $p(x_{n+k}, x_n)$ per Induktionsvoraussetzung bekannt ist und x_{n+k+1} aus der Dynamik mit Kenntnis von x_{n+k} (und allen ε_{n+k}) bestimmbar ist, wieder ohne von

x_n abzuhängen:

$$\begin{aligned}
 p(x_{n+k+1}|x_{n+k}, x_n) &= p(x_{n+k+1}|x_{n+k}) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x_{n+k+1}|x_{n+k}, \varepsilon_{n+k}) \cdot p_{0,1}(\varepsilon_{n+k}) d\varepsilon_{n+k} \\
 &= p_{0,b}(x_{n+k+1} - ax_{n+k}) \quad .
 \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
 p(x_{n+(k+1)}, x_n) &= p_{0,\sigma_x}(x_n) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} p_{0,b}(x_{n+k+1} - ax_{n+k}) \\
 &\quad \cdot p_{a^k x_n, \sigma_x \sqrt{1-a^{2k}}}(x_{n+k}) dx_{n+k} \\
 &\quad \dots \quad \text{Rechnungen analog denen für } k=2, \\
 &= p_{0,\sigma_x}(x_n) \cdot p_{a^{k+1} x_n, \sigma_x \sqrt{1-a^{2(k+1)}}}(x_{n+k+1}) \quad ,
 \end{aligned}$$

womit die Induktion bewiesen ist. Also gilt B.25, B.26.

Aus der Form der Verbundwahrscheinlichkeit

$$p(x_{n+k}, x_n) = A_k e^{-\frac{1}{B_k}(x_n^2 - 2a^k x_n x_{n+k} + x_{n+k}^2)}$$

sehen wir direkt die Zeitreversibilität

$$p(x_{n+k}, x_n) = p(x_n, x_{n+k}) \quad ,$$

da wir im Exponenten x_n und x_{n+k} einfach vertauschen können. Siehe auch Diks *et al.* (1995) [39] zu Nichtlinearitätstests auf der Basis der Zeitreversibilität der stationären Verteilung von ARMA-Prozessen.

B.3 Die Autokorrelation im stationären Fall

Aus der Verbundwahrscheinlichkeit können wir nun auch die Autokorrelation des AR(1)-Modells in der stationären Verteilung berechnen:

$$\begin{aligned}
 C(k) &:= \frac{1}{\sigma_x^2} \langle x_{n+k} \cdot x_n \rangle \\
 &= \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_{n+k} \cdot x_n \cdot p^*(x_{n+k}, x_n) dx_{n+k} dx_n \\
 &= \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} x_n \cdot p_{0,\sigma_x}(x_n) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_{n+k} \cdot p_{(a^k x_n), \sigma_x \sqrt{1-a^{2k}}}(x_{n+k}) dx_{n+k} \right) dx_n \quad ,
 \end{aligned} \tag{B.28}$$

wobei das Integral in den Klammern gerade der Mittelwert von x_{n+k} ist, also

$$\langle x_{n+k} \rangle = a^k x_n$$

wegen $p_{a^k x_n, \sigma_x \sqrt{1-a^{2k}}}(x_{n+k})$ der Gaußverteilung der Variablen x_{n+k} mit Mittelwert $a^k x_n$. Also

$$\begin{aligned}
 C(k) &= \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} x_n p_{0, \sigma_x}(x_n) \cdot a^k x_n \, dx_n \\
 &= \frac{1}{\sigma_x^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_n^2 p_{0, \sigma_x}(x_n) \, dx_n}_{\text{Varianz der Verteilung } p_{0, \sigma_x}(x_n)} a^k \\
 &= \sigma_x^2 a^k \\
 &= \frac{1}{\sigma_x^2} \sigma_x^2 a^k \\
 &= a^k .
 \end{aligned} \tag{B.29}$$

Also ist die Autokorrelation

$$C(k) := \frac{1}{\sigma_x^2} \langle x_{n+k} \cdot x_n \rangle = a^k , \tag{B.30}$$

bzw. ist die Autokorrelationszeit τ , definiert aus $C(k) = e^{-k/\tau}$, gleich $\tau = 1/\ln(\frac{1}{a})$. Zur Zeit k_0 ist die Autokorrelation $C(k_0) = 1/e$ mit k_0 eben der Autokorrelationszeit $k_0 = \tau$.

Die hier gezeigten Ergebnisse lassen sich in verschiedenen Richtungen verallgemeinern, z.B. auf höherdimensionale autoregressive Prozesse, wobei nur die Anzahl der zu lösenden Gaußintegrale wächst. Andererseits kann auf zeitkontinuierliche Größen verallgemeinert werden, z.B. für den zeitkontinuierlichen Ornstein-Uhlenbeckprozeß. Wir werden dessen Varianz und Autokorrelation weiter unten in Anhang D berechnen.

Anhang C

Invariante Dichte und Lyapunov-Exponent der Ulam-Abbildung

Die Perron-Frobenius-Zeitentwicklungsgleichung des Anhangs B, Gleichung B.11

$$p_{n+1}(x_{n+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x_{n+1} - f(x_n, \varepsilon_n)) p_n(x_n) \cdot p_\varepsilon(\varepsilon_n) dx_n d\varepsilon_n \quad . \quad (C.1)$$

kann nicht nur für verrauschte Systeme, sondern auch für die stochastische Beschreibung rein deterministischer Systeme

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (C.2)$$

benutzt werden, um etwa die invariante Verteilung p^* zu berechnen und mit ihrer Hilfe auch weitere Maße auf dem Attraktor wie dem Lyapunov-Exponenten. Ausgegangen wird von einem Ensemble von Startwerten $p_0(x_0)$ bei abwesendem Rauschen (in der Physik oft als *zero-temperature approach* bezeichnet).

Für die Ulam-Abbildung, also Gleichung 2.11 für $r_U = 4$, d.h.

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) \quad (C.3)$$

ist die Perron-Frobenius-Gleichung für das Einheitsintervall

$$p_{n+1}(x_{n+1}) = \int_0^1 \delta(x_{n+1} - 4x_n(1 - x_n)) \cdot p_n(x_n) dx_n \quad . \quad (C.4)$$

Entsprechend für die stationäre Verteilung

$$p^*(x_{n+1}) = \int_0^1 \delta(x_{n+1} - 4x_n(1 - x_n)) \cdot p^*(x_n) dx_n \quad . \quad (C.5)$$

Hieraus kann leicht verifiziert werden, daß die Verteilung Gleichung 2.19

$$p^*(x_n) = \frac{1}{\pi \sqrt{x_n(1 - x_n)}} \quad . \quad (C.6)$$

die Fixpunktgleichung erfüllt. Der Faktor π dient nur zur Normierung der Verteilung, d.h. $\int p^*(x_n) dx_n = 1$.

Es ist

$$\begin{aligned}
 p^*(x_{n+1}) &= \int_0^1 \delta(x_{n+1} - 4x_n(1-x_n)) \cdot \frac{1}{\pi\sqrt{x_n(1-x_n)}} dx_n \\
 &= \int_{y(0)}^{y(\frac{1}{2})} \delta(x_{n+1} - 4y_n) \cdot \frac{1}{\pi\sqrt{y_n}} \cdot \frac{1}{1-2x_n} dy_n \\
 &\quad + \int_{y(\frac{1}{2})}^{y(1)} \delta(x_{n+1} - 4y_n) \cdot \frac{1}{\pi\sqrt{y_n}} \cdot \frac{1}{1-2x_n} dy_n
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

mit der Substitution $y_n := x_n(1-x_n) = x_n - x_n^2$, also

$$dx_n = \frac{1}{\left(\frac{dy_n}{dx_n}\right)} dy_n = \frac{1}{1-2x_n} dy_n.$$

Da die Substitution nicht auf dem ganzen Einheitsintervall invertierbar ist, sondern vielmehr gilt:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - y} & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2}] \\
 x &= \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y} & \text{für } x \in [\frac{1}{2}, 1]
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

müssen wir das Integral in zwei Äste aufspalten und erhalten damit

$$\begin{aligned}
 p^*(x_{n+1}) &= \int_{y(0)}^{y(\frac{1}{2})} \delta(x_{n+1} - 4y_n) \cdot \frac{1}{\pi\sqrt{y_n}} \cdot \frac{1}{1-2(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y_n})} dy_n \\
 &\quad + \int_{y(\frac{1}{2})}^{y(1)} \delta(x_{n+1} - 4y_n) \cdot \frac{1}{\pi\sqrt{y_n}} \cdot \frac{1}{1-2(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y_n})} dy_n \\
 &= \int_0^{\frac{1}{4}} \delta(x_{n+1} - 4y_n) \cdot \frac{1}{\pi\sqrt{y_n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4y_n}} dy_n \\
 &\quad + \int_{\frac{1}{4}}^0 \delta(x_{n+1} - 4y_n) \cdot \frac{1}{\pi\sqrt{y_n}} \cdot \frac{1}{-\sqrt{1-4y_n}} dy_n \\
 &= 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{4}} \delta(x_{n+1} - 4y_n) \cdot \frac{1}{\pi\sqrt{y_n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4y_n}} dy_n,
 \end{aligned} \tag{C.9}$$

letzteres wegen der Vertauschung der Integrationsgrenzen, was das Minuszeichen in dem zweiten Integral beseitigt. Hieran sieht man, wie wichtig die Integrationsgrenzen bei der Invertierung der Dynamik f in der Deltafunktion sind. Mit der weiteren Substitution $y_n := 4y_n$ können wir schließlich über die Deltafunktion integrieren und erhalten

$$\begin{aligned}
 p^*(x_{n+1}) &= 2 \cdot \int_0^1 \delta(x_{n+1} - z_n) \cdot \frac{1}{\pi\sqrt{\frac{1}{4}z_n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z_n}} \cdot \frac{1}{4} dz_n \\
 &= \frac{1}{\pi\sqrt{x_{n+1}(1-x_{n+1})}},
 \end{aligned} \tag{C.10}$$

womit die Verteilung C.6 wirklich eine invariante Dichte der Ulam-Abbildung ist.

C.1 Konjugation von Ulam- und Zeltabbildung

Man kommt auf diese Form der stationäre Verteilung über die Konjugation $h(x_n) = y_n$ der Ulam-Abbildung mit der wesentlich einfacher zu behandelnden Zeltabbildung

$$y_{n+1} := g(y_n) = \begin{cases} 2y_n & \text{für } y_n \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2(1 - y_n) & \text{für } y_n \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} . \quad (\text{C.11})$$

Es ist leicht zu zeigen, daß die invariante Dichte der Zeltabbildung $p_g^*(y_n) = 1$ ist, also die Gleichverteilung auf dem Einheitsintervall. Man löst die entsprechende Perron-Frobenius-Gleichung wieder für die zwei monotonen Äste der Abbildung.

Die Konjugation ist nun gegeben (Grossmann & Thomae, 1977) [17] durch $x_n := \sin^2(\frac{\pi}{2}y_n)$ oder

$$h(x_n) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x_n}) . \quad (\text{C.12})$$

Damit ist zunächst zu zeigen, daß tatsächlich eine Konjugation vorliegt, indem für die beiden Äste jeweils

$$g(y_n) = h \circ f \circ h^{-1}(y_n) \quad (\text{C.13})$$

erfüllt ist. Für den Ast $y_n \in [0, \frac{1}{2}]$ ist

$$\begin{aligned} g(y_n) &= h \circ f \circ h^{-1}(y_n) \\ &= h \circ f(\sin^2(\frac{\pi}{2}y_n)) \\ &= h(4 \sin^2(\frac{\pi}{2}y_n) \cdot (1 - \sin^2(\frac{\pi}{2}y_n))) \\ &= h(4 \sin^2(\frac{\pi}{2}y_n) \cdot \cos^2(\frac{\pi}{2}y_n)) \\ &= h(\sin^2(\pi y_n)) \\ &= \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{\sin^2(\pi y_n)}) \\ &= 2y_n , \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

wobei zur Vereinfachung der Ausdrücke mit Winkelfunktionen der Satz von Pythagoras (ca. 571–497 v. Chr.) $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ und das Additionstheorem $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ benutzt wurden. Für den anderen Ast rechnet man analog unter Benutzung von $\sin(\frac{\pi}{2}y) = \cos(\frac{\pi}{2}(1-y))$ und $\cos(\frac{\pi}{2}y) = \sin(\frac{\pi}{2}(1-y))$ zu

$$\begin{aligned} g(y_n) &= h(4 \sin^2(\frac{\pi}{2}y) \cdot \cos^2(\frac{\pi}{2}y)) \\ &= h(4 \cos^2(\frac{\pi}{2}(1-y)) \cdot \sin^2(\frac{\pi}{2}(1-y))) \\ &= 2(1 - y_n) . \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Damit ist h tatsächlich die Konjugation zwischen Ulam- und Zeltabbildung.

Die invariante Dichte transformiert sich nun mit der Konjugation zu

$$p_f^*(x_n) dx_n = p_g^*(y_n) dy_n \quad (\text{C.16})$$

und mit der Ableitung $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ist

$$\frac{dy_n}{dx_n} = \frac{d}{dx_n} \left(\frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x_n}) \right) = \frac{1}{\pi \sqrt{x_n(1-x_n)}} ,$$

also

$$p_f^*(x_n) = \underbrace{p_g^*(y_n)}_{=1} \cdot \frac{dy_n}{dx_n} = \frac{1}{\pi \sqrt{x_n(1-x_n)}} \quad . \quad (\text{C.17})$$

C.2 Lyapunov-Exponent der Ulam-Abbildung

Für eindimensionale Dynamiken vereinfacht sich die Definition aus Abschnitt 2.4 des Lyapunov-Exponenten im Zeitmittel aus einem Startwert x_0 zu

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \left| \frac{df}{dx}(x_n) \right| \right) \quad ; \quad (\text{C.18})$$

und für ergodische Systeme, d.h. wenn ein nicht in Teile zerfallendes natürliches Maß vorliegt, ist also im Scharmittel

$$\lambda = \int_0^1 \ln \left| \frac{df}{dx}(x) \right| \cdot p^*(x) dx \quad . \quad (\text{C.19})$$

Für die Zeltabbildung ist damit

$$\begin{aligned} \lambda &= \int_0^1 \ln \left| \frac{dg}{dy}(y) \right| \cdot p_g^*(y) dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \ln|2| \cdot 1 dy + \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln|-2| \cdot 1 dy \\ &= \ln|2| \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \ln(2) \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Mit dem positiven Lyapunov-Exponenten $\lambda = \ln(2) > 0$ ist die Zeltabbildung also erwiesenermaßen chaotisch, d.h. sensitiv gegen kleine Störungen. Mit der Konjugation h zwischen Zeltabbildung und Ulamabbildung ist auch der Lyapunov-Exponent der Ulam-Abbildung $\ln(2) > 0$. Hier gilt also ebenfalls Chaotizität der invarianten Dichte.

Man kann die Bechnung des Lyapunov-Exponenten genauso für die Ulam-Abbildung durchführen, um zu sehen, ob der Lyapunov-Exponenten tatsächlich gleich ist mit dem der Zeltabbildung. Dies ist allerdings analytisch nicht so einfach ist wie die Berechnung im Falle der Zeltabbildung. Hier hilft wieder die Kenntnis der Konjugation h , die nun als Substitution im Integral dient:

$$\begin{aligned} \lambda &= \int_0^1 \ln \left| \frac{df}{dx}(x) \right| \cdot p_f^*(x) dx \\ &= \int_0^1 \ln \left| \frac{d}{dy}(h^{-1}(g(y))) \cdot \frac{dy}{dx} \right| \cdot \underbrace{p_g^*(y)}_{=1} dy \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

mit der Substitution $y = h(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{x})$ und $f(x) = h^{-1} \circ g \circ h(x) = h^{-1} \circ g(y)$. Weiter gilt Gleichung C.16 für die invarianten Dichten, wobei hier die Integrationsgrenzen 0 und 1 erhalten bleiben.

Wir teilen das Integral wieder in die beiden Äste auf. Für $y \in [0, \frac{1}{2}]$ ist nun

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{d}{dy}(h^{-1}(g(y))) \cdot \frac{dy}{dx} \right| &= \ln \left| \frac{d}{dy} \left(\sin^2 \left(\frac{\pi}{2}(2y) \right) \right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy} \right)} \right| \\ &= \ln \left| \pi \sin(\pi y) \cdot \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} \right) \sin(\pi y)} \right| \\ &= \ln(2) \end{aligned}$$

und entsprechend für den anderen Ast. Da beide Integrale jeweils mit $\frac{1}{2}$ eingehen, gilt also tatsächlich $\lambda = \ln(2)$ auch für die Ulam-Abbildung. Beachte, daß die Integrationsgrenze $\frac{1}{2}$ bei Variablentransformation mittels Konjugation ebenfalls erhalten bleibt.

Anhang D

Von der Perron-Frobenius- zur Fokker-Planck-Gleichung

Wir werden hier die Ergebnisse des AR(1)-Prozesses auf den zeitkontinuierlichen Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß übertragen

$$\dot{x} = -\alpha \cdot x + \sigma_\varepsilon \cdot \varepsilon(t) \quad (\text{D.1})$$

in den Größen Varianz und Autokorrelation und werden hieraus per Wiener-Khinchin-Theorem auch das Fourierspektrum in einfacher Weise erhalten. Bei der Übertragung der Verteilung behalten wir wieder die Gaußverteilung als invariante Dichte bei und fragen nach den Zeitentwicklungsgleichungen für solche zeitkontinuierlichen Systeme. Mittels Variablentransformation gelingt in einfacher Weise eine Verallgemeinerung auf nichtlineare eindimensionale Dynamiken (die in deterministischen Gleichungen nur auf Fixpunkte zulaufen) und multiplikatives Rauschen, also

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \cdot \sigma_\varepsilon \varepsilon(t) \quad (\text{D.2})$$

Dazu wird die Perron-Frobenius-Gleichung der zeitdiskreten Dynamik auf eine zeitkontinuierliche Gleichung zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x, t)$ transformiert, die Mastergleichung, die die Allgemeinheit zur Beschreibung beliebiger Dynamiken von der Perron-Frobenius-Gleichung (siehe Anhang C, in dem die Perron-Frobenius-Gleichung auch zur Beschreibung chaotischer Dynamiken adäquat war) beibehält. Erst unter weiteren Annahmen über die Sprungmomente (*jump moments*) kann aus der Mastergleichung die Fokker-Planck-Gleichung hergeleitet werden.

Die Analyse des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses ergibt, daß die Standardabweichung im Euler-Schema nicht mit Δt sondern mit $\sqrt{\Delta t}$ skaliert. Für gegebene zeitkontinuierliche Prozesse der Form in Gleichung D.2 stellt sich damit die Frage nach der richtig zu Grunde zu legenden zeitdiskreten Dynamik in der Herleitung der Fokker-Planck-Gleichung aus der Perron-Frobenius-Gleichung. Unter Berücksichtigung der gewohnten Variablentransformation in der Differentialrechnung wird sich der Stratonovich-Ansatz¹ der zu Grunde liegenden zeitdiskreten Dynamik als der passende gegenüber dem Itô-Ansatz erweisen.

¹Stratonovich, R.L. (1963) [147] *Topics in the Theory of Random Noise*, Vol. I, General Theory of Random Processes, Nonlinear Transformation of Signals and Noise (Gordon & Breach Science Publishers, New York, London). Darin Kapitel 4, Abschnitt 8.

Zur Computersimulation stochastischer Differentialgleichungen wie etwa einer weitergehenden Modellierung zu unseren Hippocampusexperimenten mit Feldpotentialen werden diese Betrachtungen unerlässlich sein. Welche interessanten Phänomene bei nichtlinearen Systemen unter Rauschen auftreten können, läßt sich bisher nur in Ansätzen erkennen. Attraktorswitchen ist nur eines der bekannten Beispiele. So wenig, oder so viel, wie die Ulam-Abbildung über (fraktale) Attraktoren bei anderen Parameterwerten r der logistischen Gleichung als am Ulam-Punkt $r = 4$ aussagt, so wenig, oder so viel, sagen uns glatte analytische Lösungen anderer Zeitentwicklungsgleichungen der statistischen Physik.

D.1 Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß

Wir betrachten also die Gleichung D.1, $\alpha > 0$,

$$\dot{x} = -\alpha \cdot x + \sigma_\varepsilon \cdot \varepsilon(t)$$

mit unabhängigem Gaußnormalverteiltem Rauschen

$$p(\varepsilon(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\varepsilon(t))^2} \quad (\text{D.3})$$

und führen die Zeitdiskretisierung mit dem Eulerschema durch, ersetzen also den Differentialkoeffizienten durch den Differenzenkoeffizienten

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \approx \frac{x_{t+1} - x_t}{\Delta t}$$

mit Zeitschritt Δt und Indizierung $t \rightarrow t + 1$. Dann ist also die Dynamik D.1

$$x_{t+1} - x_t = \Delta t(-\alpha x_t + \sigma_\varepsilon \cdot \varepsilon_t) \quad (\text{D.4})$$

bzw.

$$x_{t+1} = \underbrace{(1 - \alpha \Delta t)}_{=:a} x_t + \underbrace{\Delta t \sigma_\varepsilon \cdot \varepsilon_t}_{=:b} \quad (\text{D.5})$$

Nun liefert $x_{t+1} = ax_t + b \cdot \varepsilon_t$ genau die Beschreibung eines AR(1)-Prozesses mit Signalvarianz (Gleichung B.22)

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{b^2}{(1-a^2)} = \frac{(\sigma_\varepsilon \Delta t)^2}{(1-(1-\alpha \Delta t)^2)} \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2 \Delta t}{2\alpha - \alpha^2 \Delta t} \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Wir stellen die Forderung, daß σ_x^2 konstant bleiben soll beim Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$. Definiere also ein σ mit

$$\sigma_\varepsilon^2 =: \frac{\sigma^2}{\Delta t} \quad \text{mit} \quad \sigma = \text{konst} \quad (\text{D.7})$$

Damit folgt

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma^2}{2\alpha - \alpha^2 \Delta t^2} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sigma^2}{2\alpha} \quad (\text{D.8})$$

und mit der Definition von $\sigma := \sigma_\varepsilon \sqrt{\Delta t}$ laut Gleichung D.7 folgt die zu Grunde liegende zeitdiskrete Dynamik des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses

$$x_{t+1} = x_t + \Delta t \cdot (-\alpha x_t) + \sqrt{\Delta t} \sigma \varepsilon_t \quad (\text{D.9})$$

mit ε_t unabhängig Gaußnormal, so daß alle Aussagen zum AR(1)-Prozeß in Anhang B weiterhin zutreffen, insbesondere die Beschreibung durch die Perron-Frobenius-Gleichung.

Wir können also aus der Autokorrelation des AR(1)-Modells

$$C(k) = a^k \quad (\text{D.10})$$

diejenige für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß bestimmen mit $a = (1 - \alpha \Delta t)$ wie oben. Nun definieren wir die zeitkontinuierliche Verzögerung $\tau := k \cdot \Delta t$ und erhalten damit aus Gleichung D.10

$$C(\tau) = a^{\frac{\tau}{\Delta t}} = e^{\frac{\tau}{\Delta t} \ln(a)} \quad (\text{D.11})$$

mit $\ln(a) = \ln(1 - \alpha \Delta t) = -\alpha \cdot \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)$ aus der Taylorentwicklung um $\Delta t = 0$. Also

$$C(\tau) = e^{\frac{\tau}{\Delta t} \ln(a)} = e^{\frac{\tau}{\Delta t} (-\alpha \cdot \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2))} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} e^{-\alpha \cdot \tau} \quad (\text{D.12})$$

Also ist die Autokorrelationsfunktion des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses

$$C(\tau) = e^{-\alpha \cdot \tau} \quad (\text{D.13})$$

Man beachte, daß die Definition der Autokorrelation des AR(1)-Modells schon die Mittelung über die Verbundwahrscheinlichkeit war (Gleichung B.28):

$$C(k) := \frac{1}{\sigma_x^2} \langle x_{t+k} \cdot x_t \rangle = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_{t+k} \cdot x_t \, p(x_{t+k}, x_t) \, dx_{t+k} \, dx_t \quad (\text{D.14})$$

Wir haben also auch hier nur den Mittelwert der Autokorrelationsfunktion berechnet, und nicht die gesamte Verteilung $p(C(k))$. Dazu wäre im stationären Fall folgende Gleichung zu lösen

$$p(y_k) := \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y_k - x_{t+k} \cdot x_t) \, p^*(x_{t+k}, x_t) \, dx_{t+k} \, dx_t \quad (\text{D.15})$$

mit $y_k := x_t \cdot x_{t+k}$ für die Meßgröße "Autokorrelation" y_k mit $C(k)$ als Scharmittel und als Zeitmittel den Schätzer in den Yule-Walker-Gleichungen (siehe Abschnitt 4.2).

Aus der Autokorrelation kann nun das Fourierspektrum über das Wiener-Khinchin-Theorem bestimmt werden. In die Rechnung zu Wiener-Khinchin geht streng genommen die Autokovarianz $\sigma_x^2 \cdot C(\tau)$ ein statt der Autokorrelation selbst. Da wir im Datenteil mit normierten Daten arbeiten, d.h. $\sigma_x^2 = 1$, fällt der Unterschied nicht ins Gewicht. In diesem Anhang sollten wir aber im allgemeinen Ausdruck darauf achten.

Da per Definition $C(\tau)$ eine symmetrische Funktion ist, können wir für negative τ fortsetzen, d.h. $C(\tau) = e^{-\alpha \cdot |\tau|}$. Wir berechnen damit das Fourierspektrum nach

Wiener-Khintchin:

$$\begin{aligned}
 S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) \cdot \cos(2\pi f\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^{+\alpha \cdot \tau} \cdot \cos(2\pi f\tau) d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\alpha \cdot \tau} \cdot \cos(2\pi f\tau) d\tau \quad (D.16) \\
 &= 2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-\alpha \cdot \tau} \cdot \cos(2\pi f\tau) d\tau,
 \end{aligned}$$

da im Integral von $-\infty$ bis 0 substituiert werden kann mit $\tau' := -\tau$ und dann $\cos(-x) = \cos(x)$ zu nutzen ist. Zur weiteren Vereinfachung der Rechnung benutzen wir nun die komplexe Darstellung der cos-Funktion

$$\cos(x) = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

und setzen ein:

$$\begin{aligned}
 S(f) &= 2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-\alpha \cdot \tau} \cdot \frac{1}{2} (e^{(2\pi i f)\tau} + e^{(-2\pi i f)\tau}) d\tau \\
 &= \int_0^{\infty} e^{(2\pi i f - \alpha) \cdot \tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{(-2\pi i f - \alpha) \cdot \tau} d\tau \\
 &= \left[\frac{1}{2\pi i f - \alpha} e^{(2\pi i f - \alpha)\tau} \right]_0^{\infty} + \left[\frac{1}{-2\pi i f - \alpha} e^{(-2\pi i f - \alpha)\tau} \right]_0^{\infty} \\
 &= \frac{-1}{2\pi i f - \alpha} + \frac{-1}{-2\pi i f - \alpha} \quad (D.17) \\
 &= \frac{(\alpha + 2\pi i f) + (\alpha - 2\pi i f)}{\alpha^2 + (2\pi f)^2} \\
 &= \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \underbrace{(2\pi f)^2}_{=\omega^2}} \\
 &= \left(\frac{\sigma^2}{2\alpha} \right)^{-1} \cdot \frac{\sigma^2}{\alpha^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

mit $\left(\frac{\sigma^2}{2\alpha} \right) = \sigma_x^2$, der Varianz des Signals nach Gleichung D.8, und mit dem zweiten Faktor als dem bekannten Ausdruck für das Ornstein-Uhlenbeck-Spektrum.

Die stationäre Verteilung $p^*(x_t)$ des dynamischen Prozesses in Gleichung D.5 ist gegeben mit Gleichung B.19 durch

$$p^*(x_t) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_t^2}{2\sigma_x^2}} \quad (D.18)$$

mit $\sigma_x^2 \rightarrow \frac{\sigma^2}{2\alpha}$ und $\sigma = \sigma_\varepsilon \sqrt{\Delta t}$ nach Gleichung D.7 und D.8. Also ist die stationäre Verteilung des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses (Gleichung D.1)

$$p^*(x_t) = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\frac{\alpha}{\sigma^2} \cdot x_t^2} \quad (D.19)$$

D.2 Ein erstes Modell mit multiplikativem Rauschen

Aus dem Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß kann durch Koordinatentransformation ein erstes Modell mit multiplikativem Rauschen (auch als Rauschen mit phasenraum-abhängiger Varianz bezeichnet) und seiner stationären Verteilung hergeleitet werden. Wir benutzen dabei die klassischen Regeln der Koordinatentransformation und deren Differentiation.

In den weiteren Abschnitten werden wir nach den dynamischen Gleichungen für die Wahrscheinlichkeitsverteilung suchen, die dieses Modell sowie deren Verallgemeinerung und seine stationäre Verteilung liefert.

Betrachte den Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß

$$\dot{z} = -\alpha \cdot z + \sigma \cdot \varepsilon_t \quad (\text{D.20})$$

und seine stationäre Verteilung

$$p_z^*(z) = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\frac{\alpha}{\sigma^2} \cdot z^2} \quad (\text{D.21})$$

unter der Koordinatentransformation

$$z := \ln(x) \quad (\text{D.22})$$

Daraus ergibt sich das dynamische System

$$\dot{x} = -\alpha \cdot x \cdot \ln(x) + x \cdot \sigma \cdot \varepsilon_t \quad (\text{D.23})$$

wegen $\dot{z} = d(\ln(x))/dt = \dot{x}/x$.

Die stationäre Verteilung dieses Prozesses ist eine lognormale Verteilung

$$p_x^*(x) = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot \frac{1}{x} e^{-\frac{\alpha}{\sigma^2} \cdot \ln^2(x)} \quad (\text{D.24})$$

wie aus der Transformation für Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen

$$\int_{-\infty}^{z_e} p_z^*(z) dz = \int_0^{\ln(x_e)} \underbrace{p_z^*(z(x)) \frac{dz}{dx}}_{=: p_x^*(x)} dz \quad (\text{D.25})$$

mit $dz/dx = 1/x$ und $z = \ln(x)$ zu sehen ist.

Welches sind nun die dynamischen Gleichungen der Wahrscheinlichkeitsverteilung für diesen Prozeß? Wir werden wie beim AR(1)-Prozeß von der Perron-Frobenius-Gleichung starten, müssen also zunächst einen Diskretisierung finden, wie sie im Fall ohne multiplikatives Rauschen auf Gleichung D.9 führte.

D.3 Zeitentwicklungsgleichungen für multiplikatives Rauschen

D.3.1 Zeitdiskreter Stratonovich-Ansatz

Wir suchen die Zeitentwicklungsgleichungen für zeitkontinuierliche Systeme mit multiplikativem Rauschen, also die Verallgemeinerung des im vorigen Abschnitt betrachteten Prozesses, Gleichung D.2,

$$\dot{x} = f(x) + g(x) \cdot \sigma \varepsilon_t \quad (\text{D.26})$$

Eine direkte Übertragung von Gleichung D.9

$$x_{t+1} = x_t + f(x_t)\Delta t + g(x_t) \cdot \sqrt{\Delta t} \sigma \varepsilon_t \quad (\text{D.27})$$

führt im Modell des vorhergehenden Abschnittes, Gleichung D.23, nicht zur richtigen lognormalen Verteilung, Gleichung D.24, bei den von uns benutzten Transformationsregeln, wie man leicht nachrechnen kann.

Wir versuchen einen allgemeineren Ansatz, nämlich mit der Auswertung des multiplikativen Rauschens an irgend einer Stelle zwischen x_t und x_{t+1} , statt wie oben bei x_t selbst, d.h.

$$x_{t+1} = x_t + f(x_t)\Delta t + g(x_t + \gamma \cdot (x_{t+1} - x_t)) \cdot \sqrt{\Delta t} \sigma \varepsilon_t \quad (\text{D.28})$$

mit $\gamma \in [0, 1]$ nach Stratonovich (1963) [147].

Eine erste Bemerkung zu Gleichung D.28: Dies ist noch eine implizite Gleichung für x_{t+1} . Für Simulationen auf dem Computer muß eine explizite Form gefunden werden. Diese ist

$$x_{t+1} = x_t + f(x_t)\Delta t + \gamma \cdot g'(x_t) \cdot g(x_t) \cdot \sigma^2 \varepsilon_t^2 \Delta t + g(x_t) \cdot \sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t} \quad (\text{D.29})$$

mit $g'(x) := dg/dx$. Dies führt für $\gamma = 0$ wieder auf Gleichung D.27 (die Itô-Formulierung, welche nicht mit den klassischen Transformationsregel vereinbar ist). Wir werden sehen, daß $\gamma = 1/2$ die richtige Wahl ist (die Stratonovich-Formulierung).

Die Herleitung nutzt die Taylorentwicklung von $g(x_t + \gamma(x_{t+1} - x_t))$ für kleine $\Delta x_t := x_{t+1} - x_t$ wie folgt aus Gleichung D.28

$$\begin{aligned} \Delta x_t &= x_{t+1} - x_t \\ &= f(x_t)\Delta t + g(x_t + \underbrace{\gamma(x_{t+1} - x_t)}_{=\Delta x_t}) \sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t} \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

Es ist um x_t mit kleinem $\gamma \cdot \Delta x_t$ zu entwickeln, also

$$g(x_t + \gamma \Delta x_t) = g(x_t) + \frac{dg}{dx}(x_t) \gamma \Delta x_t + \mathcal{O}((\gamma \Delta x_t)^2) \quad .$$

Also insgesamt

$$\begin{aligned} \Delta x_t &= f(x_t)\Delta t + g(x_t + \gamma \Delta x_t) \sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t} \\ &= f(x_t)\Delta t + g(x_t) \sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t} + \frac{dg}{dx}(x_t) \gamma \Delta x_t \cdot \sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t} \end{aligned} \quad .$$

Der letzte Term ist wieder mit Δx_t nach Gleichung D.30

$$\begin{aligned} g' \gamma \Delta x_t \cdot \sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t} &= g' \gamma f(x_t) \underbrace{\Delta t \cdot \sqrt{\Delta t}}_{\rightarrow 0} \sigma \varepsilon_t \\ &\quad + g' \gamma g(x_t + \gamma \Delta x_t) \underbrace{\sqrt{\Delta t} \cdot \sqrt{\Delta t}}_{=\Delta t} \sigma \varepsilon_t \cdot \sigma \varepsilon_t \\ &= g' \gamma g(x_t + \gamma \Delta x_t) \Delta t \sigma^2 \varepsilon_t^2 \\ &= g' \gamma (g + g' \gamma \underbrace{\Delta x_t}_{\sim \sqrt{\Delta t}}) \Delta t \sigma^2 \varepsilon_t^2 \\ &= \gamma g' g \Delta t \sigma^2 \varepsilon_t^2 \quad . \end{aligned}$$

da $\Delta x_t = f\Delta t + g(x_t + \gamma\Delta x_t)\sqrt{\Delta t} \sim \sqrt{\Delta t}$ ist, und damit der letzte Term auch wieder von der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta t^{3/2}) \rightarrow 0$. Also ist die in x_{t+1} explizite Darstellung, Gleichung D.29, bewiesen.

Gleichung D.29 führt über die Perron-Frobenius-Gleichung für $p_t(x_t)$ zur Fokker-Planck-Gleichung in der Form

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} ((f + \gamma\sigma^2 g'g) \cdot p) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (g^2 \cdot p) \quad ,$$

wie wir im Folgenden zeigen werden.

D.3.2 Mastergleichung und Fokker-Planck-Gleichung allgemein

Aus der Dynamik in Gleichung D.28 $\Delta x_t = f(x_t)\Delta t + g(x_t + \gamma\Delta x_t) \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t$ folgt mit den beiden Definitionen

$$\ell(x_t, x_{t+1}) := \Delta x_t - f(x_t)\Delta t \quad (\text{D.31})$$

und

$$h(x_t, x_{t+1}) := g(x_t + \gamma\Delta x_t) \sigma \sqrt{\Delta t} \quad (\text{D.32})$$

die für eine Perron-Frobenius-Gleichung nötige Übergangswahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} p(x_{t+1}|x_t, \varepsilon_t) &= \delta(\ell(x_t, x_{t+1}) - h(x_t, x_{t+1}) \cdot \varepsilon_t) \\ &= \delta\left(\varepsilon_t - \frac{\ell(x_t, x_{t+1})}{h(x_t, x_{t+1})}\right) \cdot \frac{1}{h(x_t, x_{t+1})} \end{aligned} \quad (\text{D.33})$$

mit letzterer Umformung nach den Transformationsregeln für die δ -Funktion unter dem Integral. Also ist in der Perron-Frobenius-Gleichung die Integration über das Rauschen ε_t mit Verteilung $p^*(\varepsilon_t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\varepsilon_t^2}$ einfach durchzuführen (siehe unten Abschnitt D.3.3).

Die Perron-Frobenius-Gleichung ist also

$$\begin{aligned} p_{t+1}(x_{t+1}) &= \int \underbrace{\left(\int p(x_{t+1}|x_t, \varepsilon_t) p_\varepsilon(\varepsilon_t) d\varepsilon_t \right)}_{=p(x_{t+1}|x_t)} p_t(x_t) dx_t \\ &= \int p(x_{t+1}|x_t) p_t(x_t) dx_t \quad , \end{aligned} \quad (\text{D.34})$$

woraus sofort die Mastergleichung für $\Delta t \rightarrow 0$ hingeschrieben werden kann

$$\begin{aligned} \dot{p}(x_{t+1}) &:= \frac{1}{\Delta t} (p_{t+1}(x_{t+1}) - p_t(x_{t+1})) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left(\int p(x_{t+1}|x_t) p_t(x_t) dx_t - p_t(x_{t+1}) \right) \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

mit dem zweiten Term zunächst rein formal wieder als Marginalverteilung von $p(x_t, x_{t+1})$ und nach dem Satz von Bayes $p(x_t, x_{t+1}) = p(x_t|x_{t+1}) \cdot p(x_{t+1})$ d.h.

$$p_t(x_{t+1}) = \int p(x_t|x_{t+1}) p_t(x_{t+1}) dx_t \quad .$$

Also ist schließlich die Mastergleichung komplett

$$\dot{p}(x_{t+1}) = \int \left(\frac{1}{\Delta t} p(x_{t+1}|x_t) \right) p_t(x_t) dx_t - \int \left(\frac{1}{\Delta t} p(x_t|x_{t+1}) \right) dx_t \cdot p_t(x_{t+1}) \quad . \quad (\text{D.36})$$

Wir nehmen nun an, daß die Sprungweiten $\Delta x_t := x_{t+1} - x_t$ klein seien und ersetzen $x_{t+1} = x_t + \Delta x_t$ in allen Termen der Mastergleichung, also z.B. die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(x_{t+1}|x_t) = p(x_t; \Delta x_t) \quad (\text{D.37})$$

mit einer neuen Funktion $p(x_t; \Delta x_t)$ (Notation nach van Kampen, 1992 [136]). Wie dies im Einzelnen aussieht, wird in Abschnitt D.3.3 deutlich werden bei der expliziten Berechnung der Fokker-Planck-Gleichung mit dem Stratonovich-Ansatz.

Also setzt man $p(x_{t+1}|x_t) = p(x_t + \Delta x_t|x_t) =: p(x_t; \Delta x_t)$ ein in die Mastergleichung und entwickelt um die im Integral substituierende Variable $y := \Delta x_t = x_{t+1} - x_t$, d.h. $x_t = x_{t+1} - y$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \dot{p}_t(x_{t+1}) &= \int \frac{1}{\Delta t} p(x_{t+1}; y) dy \cdot p_t(x_{t+1}) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_{t+1}} \left(\underbrace{\int \frac{1}{\Delta t} y^1 p(x_{t+1}; y) dy}_{=: A_1(x_{n+1})} \cdot p_t(x_{t+1}) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_{t+1}^2} \left(\underbrace{\int \frac{1}{\Delta t} y^2 p(x_{t+1}; y) dy}_{=: A_2(x_{n+1})} \cdot p_t(x_{t+1}) \right) \\ &\quad - \int \frac{1}{\Delta t} p(x_t|x_t + \Delta x_t) dx_t \cdot p_t(x_{t+1}) \quad . \end{aligned}$$

Der erste und letzte Term heben sich gegenseitig auf, so daß mit der Definition der Sprungmomente $A_\nu(x_{n+1})$

$$A_\nu(x_{n+1}) := \int (\Delta x_t)^\nu \frac{1}{\Delta t} p(x_{t+1}; \Delta x_t) d(\Delta x_t) \quad (\text{D.38})$$

die Fokker-Planck-Gleichung folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(x_{t+1}) = - \frac{\partial}{\partial x_{t+1}} (A_1(x_{n+1}) \cdot p_t(x_{t+1})) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_{t+1}^2} (A_2(x_{n+1}) \cdot p_t(x_{t+1})) \quad . \quad (\text{D.39})$$

Dabei ist $p(x_{t+1}; y) = p(x_{t+1} + \Delta x_t|x_{t+1})$.

D.3.3 Fokker-Planck-Gleichung für den Stratonovich-Ansatz

Wir führen nun die Rechnungen von Abschnitt D.3.2 explizit für die zeitdiskrete Dynamik nach Stratonovich, Gleichung D.28, durch. Aus der Perron-Frobenius-Gleichung folgt für die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} p(x_{t+1}|x_t) &= \int p(x_{t+1}|x_t, \varepsilon_t) p_\varepsilon(\varepsilon_t) d\varepsilon_t \\ &= \int \delta\left(\varepsilon_t - \frac{\ell}{h}(x_t, x_{t+1})\right) \cdot \frac{1}{h(x_t, x_{t+1})} p_\varepsilon(\varepsilon_t) d\varepsilon_t \end{aligned} \quad (\text{D.40})$$

mit den Funktionen ℓ und h definiert wie in Gleichungen D.31 und D.32. Also ist nach Ausführung der Integration über die Delta-Funktion

$$\begin{aligned} p(x_{t+1}|x_t) &= \frac{1}{h(x_t, x_{t+1})} \cdot p_\varepsilon\left(\frac{\ell}{h}(x_t, x_{t+1})\right) \\ &= \frac{1}{g(x_t + \gamma \Delta x_t) \sigma \sqrt{\Delta t}} \cdot p_\varepsilon\left(\frac{\Delta x_t - f(x_t) \Delta t}{g(x_t + \gamma \Delta x_t) \sigma \sqrt{\Delta t}}\right) \\ &=: p(x_t; \Delta x_t) \end{aligned} \quad (D.41)$$

die nach Gleichung D.37 gesuchte Funktion $p(x_t; \Delta x_t)$.

Wir können nun die Sprungmomente mit $p(x_{t+1}; \Delta x_t)$ berechnen nach Definition D.38. Beachte, daß der Index nun bei x_{t+1} ist, nicht bei x_t . Mit den ersten zwei Sprungmomenten ergibt sich die Fokker-Planck-Gleichung für den Stratonovich-Ansatz direkt nach Gleichung D.39. Daß wir nicht noch weitere Momente als diese ersten beiden benötigen, ergibt sich aus unserer Annahme des Gaußschen Rauschens für die Verteilung $p_\varepsilon(\varepsilon_t)$, die nur diese zwei Momente ungleich Null hat, siehe Gleichung D.45.

Zur Berechnung der Sprungmomente entwickeln wir zunächst um kleine Δx_t

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x_t + \gamma \Delta x_t)} &= \frac{1}{g(x_t)} - \frac{g'(x_t)}{g^2(x_t)} \cdot \gamma \Delta x_t + \mathcal{O}((\gamma \Delta x_t)^2) \\ &\approx \frac{1}{g} - \frac{g'}{g^2} \cdot \gamma \Delta x_t \end{aligned} \quad (D.42)$$

Also ist mit unserer Notation der Gaußschen Fehlerfunktion, Gleichung B.14,

$$p_{\mu, \sigma}(x) := \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (D.43)$$

die Übergangswahrscheinlichkeit, Gleichung D.41, gegeben zu

$$\begin{aligned} p(x_{t+1}|x_t) &= \frac{1}{g(x_t + \gamma \Delta x_t) \sigma \sqrt{\Delta t}} \cdot p_\varepsilon\left(\frac{\Delta x_t - f(x_t) \Delta t}{g(x_t + \gamma \Delta x_t) \sigma \sqrt{\Delta t}}\right) \\ &= \frac{1}{g(x_t + \gamma \Delta x_t) \sigma \sqrt{\Delta t}} \cdot \underbrace{p\left(\frac{f \cdot \Delta t}{1 + \frac{g'}{g} \gamma f \Delta t}, \frac{g \sigma \sqrt{\Delta t}}{1 + \frac{g'}{g} \gamma f \Delta t}\right)}_{=: \text{Gauß}(\Delta x_t)}(\Delta x_t) \end{aligned} \quad (D.44)$$

mit der Funktion "Gauß (Δx_t)" mit entsprechendem Mittelwert und Standardabweichung wie oben angegeben. Das erste Sprungmoment ist damit

$$\begin{aligned} A_1(x_{t+1}) &= \int \Delta x_t \cdot \left(\frac{1}{g} - \frac{g'}{g^2} \gamma \Delta x_t\right) \cdot \frac{1}{\Delta t} \frac{g}{1 + \frac{g'}{g} \gamma f \Delta t} \cdot \text{Gauß}(\Delta x_t) d(\Delta x_t) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{1}{1 + \frac{g'}{g} \gamma f \Delta t} \left(\int \Delta x_t \cdot \text{Gauß}(\Delta x_t) d(\Delta x_t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{g' \gamma}{g} \cdot \int (\Delta x_t)^2 \cdot \text{Gauß}(\Delta x_t) d(\Delta x_t) \right) \end{aligned} \quad (D.45)$$

mit den Integralen jeweils als Mittelwert und als Varianz der Gaußfunktion "Gauß (Δx_t)". Also

$$A_1(x_{t+1}) = \frac{f}{(1 + \frac{g'}{g} \gamma f \Delta t)^2} - \frac{\gamma g' g^2 \sigma^2}{g \cdot (1 + \frac{g'}{g} \gamma f \Delta t)^3}$$

und damit für $\Delta t \rightarrow 0$

$$A_1 = f - \gamma g' g \sigma^2 \quad (D.46)$$

Eine entsprechende Rechnung für A_2 liefert

$$A_2(x_{t+1}) = \frac{g^2 \sigma^2}{(1 + \frac{g'}{g} \gamma f \Delta t)^3}$$

und für $\Delta t \rightarrow 0$

$$A_2 = g^2 \sigma^2 \quad . \quad (\text{D.47})$$

Also ist die Fokker-Planck-Gleichung nach Gleichung D.39 bei Einsetzen obiger zwei Sprungmomente für den Stratonovich-Ansatz mit beliebigem $\gamma \in [0, 1]$ gegeben durch

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} ((f + \gamma \sigma^2 g' g) \cdot p) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (g^2 \cdot p) \quad . \quad (\text{D.48})$$

D.3.4 Klassische Transformation führt auf $\gamma = 1/2$

Eine Koordinatentransformation der Fokker-Planck-Gleichung für additives Rauschen, d.h. die Funktion $g(x) = 1$, auf den Fall des multiplikativen Rauschens führt auf die Fokker-Planck-Gleichung in folgender Form

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (f \cdot p) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial}{\partial x} (g \cdot p) \right) \quad . \quad (\text{D.49})$$

Diese ist mit der im vorigen Abschnitt für noch beliebiges γ hergeleiteten Gleichung D.48 nur gleich bei

$$\gamma = \frac{1}{2} \quad ,$$

wie man leicht nachprüft.

Wir können abschließend noch die stationäre Verteilung $p^*(x)$ unseres dynamischen Prozesses aus Abschnitt D.2, Gleichung D.23, direkt aus der Fokker-Planck-Gleichung berechnen.

Im stationären Fall ist $\partial p^* / \partial t = 0$, d.h.

$$-\frac{\partial}{\partial x} (f p^*) + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial}{\partial x} (g p^*) \right) = 0 \quad ,$$

woraus durch einfache Integration folgt

$$p^*(x) = k \cdot e^{I(x)} \quad , \quad I(x) = \int \left(\frac{2}{\sigma^2} \frac{f}{g^2} - \frac{g'}{g} \right) dx \quad (\text{D.50})$$

mit zusätzlicher Normierungskonstante k .

Für unser Beispiel, Gleichung D.23, ist mit $f(x) = -\alpha x \ln(x)$ und $g(x) = x$ das Integral

$$I(x) = -\alpha \frac{2}{\sigma^2} \int \frac{\ln(x)}{x} dx - \int \frac{1}{x} dx \quad ,$$

was auf die Lognormalverteilung, Gleichung D.24, führt, wenn man zusätzlich zu Gleichung D.50 noch die Normierung für die stationäre Verteilung p^* beachtet.

Also ist mit $\int (\ln(x)/x) dx = \frac{1}{2} \ln^2(x)$ und $\int (1/x) dx = \ln(x)$

$$I(x) = -\frac{\alpha}{\sigma^2} \ln^2(x) - \ln(x) \quad (\text{D.51})$$

und

$$p^*(x) = k \cdot e^{I(x)} = k \cdot e^{-\frac{\alpha}{\sigma^2} \ln^2(x)} \cdot \frac{1}{x} \quad (\text{D.52})$$

mit der x -Abhängigkeit der Lognormalverteilung. Weiter ist die Normierungsbedingung

$$1 = \int_0^{\infty} p^*(x) dx = k \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{-\frac{\alpha}{\sigma^2} \ln^2(x)} dx \quad . \quad (\text{D.53})$$

Mit der Substitution $y := \ln(x)$, $dy = (1/x) dx$ ist das Integral

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{x} e^{-\frac{\alpha}{\sigma^2} \ln^2(x)} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\alpha}{\sigma^2} y^2} dy \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{\sigma}{\sqrt{2\alpha}} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2\alpha}}\right)^2}} dy}_{=1} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{2\alpha}} \sqrt{2\pi} \\ &= \sigma \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad . \end{aligned} \quad (\text{D.54})$$

Nun ist k das Inverse dieses Integrals (siehe Gleichung D.53), also

$$k = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \quad . \quad (\text{D.55})$$

Damit ist $p^*(x)$ die Lognormalverteilung, hier aus der Fokker-Planck-Gleichung für die Dynamik $\dot{x} = -\alpha x \ln(x) + x \sigma \varepsilon_t$ gewonnen.

Anhang E

First-Passage-Time-Problem für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß

Nach der allgemeinen Herleitung der Fokker-Planck-Gleichung in Anhang D beschränken wir uns nun wieder auf den Ornstein-Uhlenbeck-Prozeß, um das *first passage time*-Problem (FPT) darzustellen, was uns in Kapitel 7 die mittlere Feuerrate eines stochastischen integrate-and-fire-Neurons liefert.

Wir werden zunächst die zeitabhängige Lösung des unbeschränkten Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses berechnen, um mit ihrer Hilfe die Integralgleichung für die FPT-Verteilung aufzustellen. Dann zeigen wir für einen Spezialfall die explizite Lösung der Integralgleichung mittels Laplace-Transformation. Für diesen Spezialfall besteht die Lösung der FPT-Verteilung nur aus elementaren Funktionen (siehe auch Ricciardi & Sato, 1988 [70]), während im allgemeinen Fall ein Produkt aus parabolischen Zylinderfunktionen in der Laplace-Transformierten der Lösung des unbeschränkten Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses den weiteren Weg versperrt. Der analytisch lösbare Spezialfall stellt sich heraus als derjenige für Eingangsstrom I_{in} gleich dem kritischen Wert I_{kr} , d.h. dort wo die deterministische Lösung ihre Unstetigkeit hat.

Die mittlere FPT (für unser Neuronenmodell also die mittlere Feuerrate) ergibt sich aus der Laplace-Transformation der allgemeinen Lösung der FPT-Verteilung nach Gleichung 7.34 zur Lösung 7.35. Die hier benutzte Reihendarstellung Gleichung 7.35 ist numerisch einfacher zu handhaben als die klassische Lösung der mittleren FPT nach Siegert (1951)¹ [72]. Siehe auch Ricciardi & Sato (1988) [70].

E.1 Lösung des unbeschränkten Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses

Für das stochastische integrate-and-fire-Neuron (Gleichung 7.22) müssen wir die Langevin-Gleichung des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses (Gleichung D.1) mit zusätzlicher additiver Konstante betrachten, also

$$\dot{x} = -a \cdot x + b + \sigma_\varepsilon \cdot \varepsilon(t) \quad , \quad (\text{E.1})$$

¹Siegert, A.J.F. (1951) On the First Passage Time Probability Problem, *Phys. Rev.* **81**, 617–623.

was die Fokker-Planck-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} ((-a \cdot x + b) \cdot p(x, t)) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} (p(x, t)) \quad (\text{E.2})$$

liefert mit $D := \frac{\sigma^2}{2}$. Sei $\varepsilon(t)$ nun wieder i.i.d. Gaußisches Rauschen. Dieses wird durch den linearen Driftterm $(-a \cdot x + b)$ auch nur linear transformiert, d.h. nur Mittelwert μ und Standardabweichung σ ändern sich.

Wir setzen also $p(x, t)$ als Gaußverteilung mit zeitveränderlichem $\mu(t)$ und $\sigma(t)$ an zu

$$p(x, t) := \frac{1}{\sigma(t)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu(t))^2}{2\sigma^2(t)}} \quad (\text{E.3})$$

und berücksichtigen die Anfangsbedingung $p(x, t_0) = \delta(x - x_0)$ durch $\mu(t_0) = x_0$ und $\sigma(t_0) = 0$. Einsetzen dieses Ansatzes in die Fokker-Planck-Gleichung liefert die zeitabhängige Verteilung des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses bei unbeschränkten Rändern, d.h. $x \in \mathbb{R}$.

Mit der Funktion $v(t) := \sigma^2(t)$ liefert die linke Seite der Fokker-Planck-Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{v}} \right) \cdot e^{-\frac{(x-\mu(t))^2}{2v(t)}} + \underbrace{\frac{1}{v(t)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu(t))^2}{2v(t)}} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{(x-\mu(t))^2}{2v(t)} \right)}_{=p(x,t)} \\ &= \frac{1}{(2v)^2} (2\dot{v} \cdot x^2 + (4v\dot{\mu} - 4\mu\dot{v}) \cdot x + 2\mu^2 - 2v - 4v\mu\dot{\mu}) p(x, t) \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

mit $\dot{v} := \frac{dv}{dt}$ etc., während die rechte Seite

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial}{\partial x} ((-a \cdot x + b) \cdot p(x, t)) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} (p(x, t)) \\ &= \frac{1}{(2v)^2} ((4D - 4av)x^2 + (4va\mu + 4vb - 8\mu D) \cdot x \\ &\quad + (2v)^2 a + 4D(\mu^2 - v) - 4vb\mu) p(x, t) \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

liefert. Da beide Seiten für beliebige x gleich sein sollen, muß jeder Vorfaktor vor den Potenzen von x gleich sein, also für $\mathcal{O}(x^2)$:

$$2\dot{v} = 4D - 4av \quad , \quad (\text{E.6})$$

was eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung für die Varianz $v(t)$ liefert, d.h.

$$\dot{v} = -2av + 2D \quad , \quad (\text{E.7})$$

bei Anfangsbedingung $v(t_0) = 0$, und für $\mathcal{O}(x^1)$:

$$4v\dot{\mu} - 4\mu\dot{v} = 4va\mu + 4vb - 8\mu D \quad , \quad (\text{E.8})$$

und nach einsetzen der Differentialgleichung für v

$$\dot{\mu} = -a\mu + b \quad , \quad (\text{E.9})$$

also wieder eine lineare Differentialgleichung für den Mittelwert $\mu(t)$ mit Anfangsbedingung $\mu(t_0) = x_0$.

Wir lösen zunächst $\dot{\mu} = -a\mu + b$. Die homogene Differentialgleichung $\dot{\mu} = -a\mu$ hat die Lösung $\mu(t) = C'e^{-at}$, also per Variation der Konstanten $C = C(t)$ folgt für die inhomogene Differentialgleichung $\dot{\mu} = -a\mu + b$

$$\dot{\mu} = \dot{C}e^{-at} - a\mu(t) \quad , \quad (\text{E.10})$$

also

$$b = \dot{C}e^{-at} \quad , \quad (\text{E.11})$$

und

$$\int_{C(t_0)}^{C(t)} C \, dC = \int_{t_0}^t b \cdot e^{at'} \, dt' \quad . \quad (\text{E.12})$$

Also ist

$$C(t) = \frac{b}{a} (e^{at} - e^{at_0}) + C(t_0) \quad , \quad (\text{E.13})$$

und

$$\mu(t) = \frac{b}{a} - \frac{b}{a} \cdot e^{-a(t-t_0)} + C(t_0)e^{-at} \quad . \quad (\text{E.14})$$

Mit der Startbedingung $\mu(t_0) = x_0$ folgt $C(t_0)$ wie folgt:

$$\mu(t_0) = \underbrace{\frac{b}{a} - \frac{b}{a} \cdot e^{-a(t_0-t_0)}}_{=0} + C(t_0)e^{-at_0} \quad , \quad (\text{E.15})$$

d.h. $x_0 = C(t_0)e^{-at_0}$ oder

$$C(t_0) = x_0 \cdot e^{at_0} \quad . \quad (\text{E.16})$$

Also insgesamt

$$\mu(t) = \frac{b}{a} + (x_0 - \frac{b}{a}) \cdot e^{-a(t-t_0)} \quad . \quad (\text{E.17})$$

Die analoge Rechnung für $v(t) = \sigma^2(t)$ ergibt mit Anfangsbedingung $\sigma^2(t_0) = 0$

$$\sigma^2(t) = \frac{D}{a} (1 - e^{-2a(t-t_0)}) \quad . \quad (\text{E.18})$$

Also ist $p(x, t)$, bzw. wegen $p(x, t_0) = \delta(x - x_0)$ auch die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$p(x, t|x_0, t_0) = \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sqrt{1 - e^{-2a(t-t_0)}}} e^{-\frac{\left((x - \frac{b}{a}) - (x_0 - \frac{b}{a})e^{-a(t-t_0)}\right)^2}{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{a} (1 - e^{-2a(t-t_0)})}} \quad (\text{E.19})$$

nach dem Ansatz E.3 mit den Lösungen E.17 und E.18.

E.2 Die Integralgleichung für die First-Passage-Time-Verteilung

Aus der Lösung für das unbeschränkte Ornstein-Uhlenbeck-System (siehe Gleichung E.19) konstruieren wir nun mit dem Satz von Bayes und der Definition der Marginalverteilung eine Integralgleichung für die FPT-Verteilung. Bisher haben wir diese Sätze nur für die Raumkoordinate x benutzt, d.h.

$$p(x, t|x_0, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, t|x', t') \cdot p(x', t'|x_0, t_0) \, dx' \quad . \quad (\text{E.20})$$

Wir können aber genauso gut über die Zeit integrieren

$$p(x, t|x_0, t_0) = \int_0^t p(x, t|x', t') \cdot p(x', t'|x_0, t_0) \, dt' \quad (\text{E.21})$$

und zerlegen $p(x', t' | x_0, t_0)$ in den Anteil $\varrho(x', t' | x_0, t_0)$ aller Wege, die für Zeiten $[t_0, t')$ den Wert x' noch nicht erreicht haben, und den Anteil $r(x', t' | x_0, t_0)$ aller Wege, die schon einmal den Wert x' überschritten haben, also

$$p(x', t' | x_0, t_0) = \varrho(x', t' | x_0, t_0) + r(x', t' | x_0, t_0) \quad (\text{E.22})$$

Setzt man nun $x' = x = x_S$ als Schwelle mit Absorption an, so gilt

$$\begin{aligned} p(x, t | x_0, t_0) &= \int_0^t p(x, t | x, t') \cdot p(x, t' | x_0, t_0) dt' \\ &= \int_0^t p(x, t | x, t') \cdot \varrho(x, t' | x_0, t_0) dt' \\ &\quad + \underbrace{\int_0^t p(x, t | x, t') \cdot r(x, t' | x_0, t_0) dt'}_{=0} \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

mit $\int p \cdot \varrho dt = 0$, da die Schwelle x absorbierend ist. Damit ist $\varrho(x', t' | x_0, t_0)$ als *first-passage-time*-Verteilung definiert und als Lösung der Renewal-Gleichung zu bestimmen aus der Lösung des unbeschränkten Problems $p(x, t | x_0, t_0)$

$$p(x, t | x_0, t_0) = \int_0^t p(x, t | x, t') \cdot \varrho(x, t' | x_0, t_0) dt' \quad (\text{E.24})$$

Da im Falle des unbeschränkten Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses $p(x, t | x_0, t_0)$ eine Funktion von $\tau := t - t'$ allein ist (Gleichung E.19), kann der Faltungssatz für die Laplace-Transformation angewendet werden, um ϱ zu bestimmen:

$$g(t) = \int_0^t f(t - t') \cdot h(t') dt' =: (f * h)(t) \quad (\text{E.25})$$

und

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{f(\tau)\} \cdot \mathcal{L}\{h(t')\} \quad (\text{E.26})$$

mit der Laplace-Transformation $\mathcal{L}\{f(t)\} := \int_0^\infty e^{-ts} \cdot f(t) dt =: \hat{f}(s)$ der Funktion $f(t)$. Also ist

$$\mathcal{L}\{\varrho(x, t' | x_0, t_0)\} = \frac{\mathcal{L}\{p(x, t | x_0, t_0)\}}{\mathcal{L}\{p(x, t | x, t')\}} \quad (\text{E.27})$$

und

$$\varrho(x, t' | x_0, t_0) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{L}\{p(x, t | x_0, t_0)\}}{\mathcal{L}\{p(x, t | x, t')\}} \right\} \quad (\text{E.28})$$

mit der inversen Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}^{-1}\{\hat{f}(t)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{ts} \cdot \hat{f}(s) ds = f(t)$$

mit $\gamma > 0$. Für den speziellen Fall der Schranke x gleich dem Wert $\frac{b}{a}$ ist ϱ in elementaren Funktionen angebar, wie wir im folgenden Abschnitt E.3 zeigen werden.

E.3 Ein analytisch einfach lösbarer Spezialfall

Setzen wir die Schwelle $x = b/a$, so wird

$$\begin{aligned} p(x, t|x_0, t_0) &= \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sqrt{1 - e^{-2a(t-t_0)}}} e^0 \\ &= \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{\pi}{a}}} (1 - e^{-2a\tau})^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{E.29})$$

mit $\tau = t - t_0$.

Nach Prudnikov *et al.* (1992)² [155], Band 4, Seite 33, 2.2.4, Nr. 1, ist die Laplace-Transformation einer Funktion $f(t) = (1 - e^{-at})^\nu$ gegeben durch

$$\mathcal{L}\{(1 - e^{-at})^\nu\} = \frac{1}{a} B\left(\frac{s}{a}, \nu + 1\right) \quad (\text{E.30})$$

mit der Beta-Funktion $B(\alpha, \beta) := \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ und der Gamma-Funktion $\Gamma(z) := \int_{-\infty}^{\infty} y^{z-1} e^{-y} dy$. Also ist hier mit $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{p(x, t|x, t')\} &= \mathcal{L}\{(\sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{\pi}{a}})^{-1} \cdot (1 - e^{-2a\tau})^{-\frac{1}{2}}\} \\ &= (\sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{\pi}{a}})^{-1} \cdot \frac{1}{2a} B\left(\frac{s}{2a}, -\frac{1}{2} + 1\right) \\ &= \frac{1}{2\sigma_\varepsilon \sqrt{a}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{s}{2a})}{\Gamma(\frac{s}{2a} + \frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (\text{E.31})$$

Weiter ist mit Startwerten $x_0 := 0, t_0 := 0$ und $x = b/a$

$$\begin{aligned} p(x, t|x_0, t_0) &= p(x, t|0, 0) \\ &= \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sqrt{1 - e^{-2at}}} e^{-\frac{(\frac{b}{a})^2 e^{-2at}}{\frac{\sigma_\varepsilon^2}{a} \cdot (1 - e^{-2at})}} \\ &= k_1 (1 - e^{-2at})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{k_2}{e^{2at} - 1}} \end{aligned} \quad (\text{E.32})$$

mit Konstanten $k_1 := \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{\pi}{a}}}$ und $k_2 := \frac{b^2}{\sigma_\varepsilon^2 a}$. Wieder laut Prudnikov *et al.* (1992) [155], Band 4, Seite 45, 2.2.6, Nr.12, ist

$$\mathcal{L}\{(1 - e^{-t})^\nu e^{-\frac{a}{\varepsilon^2 t-1}}\} = \Gamma(s) \cdot a^{\frac{\nu}{2}} e^{\frac{a}{2}} W_{-s-\frac{\nu}{2}, \frac{(\nu+1)}{2}}(a) \quad (\text{E.33})$$

mit der Whittakerschen konfluenten hypergeometrischen Funktion $W_{\kappa, \mu}(z)$, die sich nun mit der Tricomi-konfluenten hypergeometrischen Funktion Ψ darstellen läßt als

$$W_{\kappa, \mu}(z) = z^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}} \Psi\left(\mu - \kappa + \frac{1}{2}, 2\mu + 1; z\right) \quad (\text{E.34})$$

Schließlich benötigen wir noch den Ähnlichkeitssatz für die Laplace-Transformation

$$\mathcal{L}\{f(a \cdot t)\} = \frac{1}{a} \cdot \hat{f}\left(\frac{s}{a}\right) \quad (\text{E.35})$$

²Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A., & Marichev, O.I. (1992) *Integrals and Series* (Gordon and Breach, New York).

Mit der Substitution $x := 2at$ ist

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{p(x, t|x_0, t_0)\} &= \mathcal{L}\left\{k_1 (1 - e^{-2at})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{k_2}{e^{2at}-1}}\right\} \\
 &= k_1 \cdot \mathcal{L}\left\{(1 - e^{-x})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{k_2}{e^x-1}}\right\} \\
 &= k_1 \cdot \frac{1}{2a} \Gamma\left(\frac{s}{2a}\right) k_2^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{k_2}{2}} W_{-\frac{s}{2a}+\frac{1}{4}, \frac{1}{4}}(k_2) \quad .
 \end{aligned} \tag{E.36}$$

Also ist insgesamt

$$\mathcal{L}\{p(x, t|x_0, t_0)\} = \frac{k_1}{2a} k_2^{\frac{1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2a}\right) \Psi\left(\frac{s}{2a} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; k_2\right) \quad . \tag{E.37}$$

Nun ist wegen des Faltungssatzes die Laplace-Transformation der FPT-Verteilung $\varrho(x, t'|x_0, t_0)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\varrho(x, t'|x_0, t_0)\} &= \frac{\mathcal{L}\{p(x, t|x_0, t_0)\}}{\mathcal{L}\{p(x, t|x, t')\}} \\
 &= \frac{\sigma_g}{\sqrt{a}} k_1 k_2^{\frac{1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2a} + \frac{1}{2}\right) \Psi\left(\frac{s}{2a} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; k_2\right) \quad ,
 \end{aligned} \tag{E.38}$$

und laut Prudnikov *et al.* (1992) [155], Band 5, Seite 363, 3.34.7, Nr. 4, ist

$$\mathcal{L}^{-1}\{\Gamma(s+a) \cdot \Psi(s+a, b; \omega)\} = e^{-ax} (1 - e^{-x})^{-b} e^{\frac{\omega}{1-e^x}} \quad , \tag{E.39}$$

also hier

$$\begin{aligned}
 \varrho(x, t'|x_0, t_0) &= \frac{\sigma_g}{\sqrt{a}} k_1 k_2^{\frac{1}{2}} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\Gamma\left(\frac{s}{2a} + \frac{1}{2}\right) \cdot \Psi\left(\frac{s}{2a} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; k_2\right)\right\} \\
 &= \frac{\sigma_g}{\sqrt{a}} k_1 k_2^{\frac{1}{2}} \cdot 2a \frac{e^{-2at'} \cdot \frac{1}{2}}{(1 - e^{-2at'})^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{\frac{k_2}{1 - e^{2at'}}} \\
 &= \frac{2a\left(\frac{b}{a}\right)}{\frac{\sigma_g}{\sqrt{a}}\sqrt{\pi}} \cdot \frac{e^{2at'}}{(e^{2at'} - 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{\frac{-\left(\frac{b}{a}\right)^2}{\frac{\sigma_g^2}{a}(e^{2at'} - 1)}}
 \end{aligned} \tag{E.40}$$

mit $e^{-\frac{1}{2}} (1 - e^{-x})^{-\frac{3}{2}} = e^x \cdot e^{-\frac{3}{2}} (1 - e^{-x})^{-\frac{3}{2}} = \frac{e^x}{(e^x - 1)^{\frac{3}{2}}}$. Also ist die FPT-Verteilung für den Spezialfall $x = b/a$ und Anfangsbedingungen $x_0 = 0, t_0 = 0$ gegeben durch

$$\varrho(x, t) = \frac{2b}{\sigma_\varepsilon \sqrt{a\pi}} \cdot \frac{e^{2at}}{(e^{2at} - 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{\frac{-b^2}{\sigma_\varepsilon^2 a (e^{2at} - 1)}} \quad . \tag{E.41}$$

Dieser Spezialfall $x = b/a$ ist mit $I_{in} = I_{kr}$, wie sie in Kapitel 7 definiert sind, identifizierbar.

Anhang F

Chaoskontrollalgorithmen

F.1 Bestimmung instabiler Perioden

Da es Ziel der Chaoskontrolle ist, die instabilen Perioden des chaotischen Attraktors zu stabilisieren, müssen zunächst diese instabilen Punkte gefunden werden. In chaotischen Attraktoren gibt es unendlich viele instabile Perioden. Die Chaoskontrollalgorithmen konzentrieren sich oft nur auf Fixpunkte der Dynamik, also Periodenlänge 1, oder niedrige Perioden. Man benutzt zur Bestimmung der periodischen Punkte das mehrdimensionale Newton-Verfahren. Sei die zeitdiskrete Dynamik gegeben durch

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{f}(\underline{x}_n) \quad . \quad (\text{F.1})$$

So gilt für die periodischen Punkte der Periode P , definiert durch ihre Eigenschaft als Fixpunkte der P -fach iterierten Dynamik $\underline{f}^{(P)}$,

$$\underline{x}_P = \underline{f}^{(P)}(\underline{x}_P) \quad . \quad (\text{F.2})$$

Da diese periodischen Lösungen instabil sind, können sie nicht direkt aus der Dynamik berechnet werden, so daß wir folgende Lösung benutzen müssen: Wir suchen die Nullstellen der Funktion

$$\underline{F}(\underline{x}_P) := \underline{x}_P - \underline{f}^{(P)}(\underline{x}_P) \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{F.3})$$

mittels mehrdimensionalem Newton-Verfahren

$$\underline{x}_{i+1} = \underline{x}_i - J^{-1} \cdot \underline{F}(\underline{x}_i) \quad (\text{F.4})$$

mit der Inversen J^{-1} der Jacobimatrix J

$$J := \frac{d\underline{F}}{d\underline{x}} \quad . \quad (\text{F.5})$$

Bei den hier betrachteten 2-dimensionalen Dynamiken ($\underline{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, d.h. $\underline{x} = (x, y)^{tr}$) sind die obigen Ausdrücke leicht hinzuschreiben mit

$$\underline{F} =: \begin{pmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \end{pmatrix}$$

und

$$J = \frac{d\underline{F}}{d\underline{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und der Inversen

$$J^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

In der Programmierung reicht oft schon die Näherung der partiellen Ableitungen durch die entsprechenden Differenzenquotienten in solchen Fällen, in denen die Ableitungen einmal Schwierigkeiten bereiten sollten, also z.B.

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} \approx \frac{1}{\Delta y} (F_x(x, y + \Delta y) - F_x(x, y))$$

etc. mit ausreichender Schrittweite $\Delta x, \Delta y = 10^{-4}$. Nun nimmt man Startwerte \underline{x}_0 für das Newton-Verfahren etwa durch Abrastern des interessierenden Phasenraumbereiches, für unseren Beispielattraktor des Zweineuronenmoduls der Bereich $[-15, 5] \times [-4, 4]$, oder Startwerte direkt auf dem chaotischen Attraktor. Nach der Konvergenz des Newton-Verfahrens erhält man eine Liste aller periodischen Punkte der Periode P , auch aller Teiler von P . Z.B. für $P = 4$ sind dies 7 Punkte (für $P=1, 2$ und 4), für Periode $P = 5$ sind es 11 Punkte (zweimal Periode 5 selbst und $P=1$, der einzige Fixpunkt der Dynamik). Eine Abschätzung der Anzahl der periodischen Punkte der Periode P erhält man über die exponentielle Skalierung mit der topologischen Entropie als Skalierungsfaktor (Procaccia, 1987) [107]. In unserem Attraktor haben wir die topologische Entropie gemessen mit dem Ergebnis $0,422 \pm 0,004$ (Stollenwerk & Pasemann, 1996(a)) [2].

Die Ergebnisse aus der Bestimmung der periodischen Punkte mit dem Newton-Verfahren sind für die ersten Perioden in Tabelle F.1 gegeben,

P	$x_{P,i}$	$y_{P,i}$
1	-1,2804	1,6951
2	0,3107	2,9976
	-7,8262	-0,4623
3	-	-
4	-2,4789	1,1417
	1,0010	2,5359
	-11,0652	-1,3875
	-0,8014	2,9999

Tabelle F.1: Liste der erste vier instabilen Perioden im Attraktor des Zweineuronenmoduls. Keine Periode 3 wurde hier gefunden. Es ist in solchen chaotischen Systemen natürlich, daß einzelne Perioden nicht existieren, bzw. auch mehrfach vorkommen, so etwa zwei Perioden 5.

sowie in Tabelle F.2 für die beiden Perioden fünf, von denen Periode 5.1 in Kapitel 8 benutzt wird.

Instabile periodische Punkte, inclusive ihrer stabilen und instabilen Richtungen, in chaotischen Attraktoren können nicht nur bestimmt werden, wenn man die Dynamik, hier f , kennt, sondern auch aus gemessenen Zeitreihen direkt ohne Kenntnis der Dynamik (Gunaratne *et al.*, 1989)¹ [108].

F.2 Verschiedene Kontrollalgorithmen

Wir betrachten nun die gängigsten Kontrollalgorithmen im Vergleich, angewendet auf unser Kontrollproblem des chaotischen sigmoidalen Zweineuronenmoduls per

¹Gunaratne, G.H., Linsay, P.S. & Vinson, M.J. (1989) Chaos beyond onset: A comparison of theory and experiment, *Phys. Rev. Lett.* 63, 1-4.

P	$x_{P,i}$	$y_{P,i}$
5.1	-2,7203	1,2835
	1,4625	2,6293
	-12,6421	-1,8715
	-1,1999	2,99998
	-0,9145	1,6110
5.2	-4,8322	0,6144
	1,7355	2,9526
	-13,3001	-2,1007
	-1,3459	2,99999
	-0,4155	1,7607

Tabelle F.2: Liste der beiden instabilen Perioden fünf.

Kontroller aus denselben sigmoidalen Neuronen.

Als chaotische Dynamik dient uns Gleichung 2.13 des Zweineuronenmoduls mit Kontrolle p_n wie in Gleichung F.30 eingeführt, allgemein zu schreiben als Abbildung $\underline{f} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Dynamik

$$\underline{x}_{n+1} = \underline{f}(\underline{x}_n; p_n) \quad . \quad (\text{F.6})$$

In der Nachbarschaft der instabilen periodischen Punkte, wenn

$$\Delta \underline{x}_n := \underline{x}_n - \underline{x}_{P,i}$$

als klein betrachtet werden kann, betrachten wir die Linearisierungen der Dynamik in Gleichung F.6

$$\mathbf{M}_i := \left. \frac{d\underline{f}}{d\underline{x}} \right|_{\underline{x}_{P,i}(0), p=0}, \quad \underline{h}_i := \left. \frac{d\underline{f}}{dp} \right|_{\underline{x}_{P,i}(0), p=0} \quad . \quad (\text{F.7})$$

Zur Zeit n wird die Abweichung des gegenwärtigen Zustandes \underline{x}_n vom periodischen Punkt $\underline{x}_{P,i}$ betrachtet.

Wir führen nun einen Vergleich von drei Kontrollmöglichkeiten kurz vor: Es sind die Ott-Grebogi-Yorke-Methode (OGY), eine nichtlineare Least-Squares-Methode (LS) und ihre Linearisierung (LLS).

F.2.1 OGY-Methode

Mit Gleichung F.2 wird die Folgeschrittabweichung $\Delta \underline{x}_{n+1}$ gegeben als Funktion von $\Delta \underline{x}_n$ und den Kontrollparameter p_n mittels

$$\Delta \underline{x}_{n+1} = \underline{f}(\underline{x}_n; p_n) - \underline{x}_{P,i+1} \quad . \quad (\text{F.8})$$

Eine Minimierungsbedingung für $\Delta \underline{x}_{n+1}$ liefert den expliziten Wert von p_n zum Zeitschritt n .

In Ott, Grebogi & Yorke (1990(a)) [88] wird eine Minimierungsbedingung hergeleitet aus der Linearisierung der Dynamik $\underline{x}_{n+1} = \underline{f}(\underline{x}_n; p_n)$ um die periodischen Punkte $\underline{x}_{P,i}$ wie folgt

$$\begin{aligned} \Delta \underline{x}_{n+1} &= \underline{f}(\underline{x}_n; p_n) - \underline{x}_{P,i+1} \\ &= \mathbf{M}_i \cdot \Delta \underline{x}_n + \underline{h}_i \cdot p_n + \text{höhere Ordnungen} \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

mit $\underline{x}_{P,i+1} = \underline{f}(\underline{x}_{P,i}, p_n)|_{p_n=0}$ und den Linearisierungen der Dynamik in Gleichung F.7.

Die Linearisierung bezüglich des Kontrollparameters p kann auch durch die Änderung der periodischen Punkte mit dem Kontrollparameter dargestellt werden

$$\underline{g}_i := \left. \frac{d\underline{x}_{P,i}(p)}{dp} \right|_{p=0}, \quad \underline{g}_{i+1} := \left. \frac{d\underline{x}_{P,i+1}(p)}{dp} \right|_{p=0}, \quad (\text{F.10})$$

wodurch wir den interessanten Zusammenhang

$$\underline{h}_i = (\underline{g}_{i+1} - \mathbf{M}_i \cdot \underline{g}_i) \quad (\text{F.11})$$

erhalten für $i = 1, \dots, P$ periodisch fortgesetzt. Der Beweis von Gleichung F.11 kann leicht per Taylor-Entwicklung der Funktion $\Delta \underline{x}_{n+1}(\Delta \underline{x}_n, p_n)$ bis zu erster Ordnung um zuerst $p = 0$, dann $\underline{x} = \underline{x}_{P,i}$, woraus wir \underline{h} erhalten, und umgekehrt, woraus wir \underline{g} erhalten, durchgeführt werden.

Ott, Grebogi und Yorke zerlegen die Matrix \mathbf{M}_i in ein Produkt von Links- und Rechtseigenvektoren und die Diagonalmatrix der Eigenwerte. Zur einfachen Darstellung betrachte ein zweidimensionales System $\underline{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Mit den Eigenwerten $|\lambda_u| > 1$ und $|\lambda_s| < 1$ von \mathbf{M} , die die instabile (*unstable*) und stabile (*stable*) Richtung charakterisieren, ist also

$$\mathbf{M}_i = \begin{pmatrix} \underline{e}_{s,i} & \underline{e}_{u,i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{s,i} & 0 \\ 0 & \lambda_{u,i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{F}}_{s,i}^{tr} \\ \underline{\mathcal{F}}_{u,i}^{tr} \end{pmatrix} \quad (\text{F.12})$$

mit $\mathbf{M}\underline{e}_\nu = \lambda_\nu \underline{e}_\nu$ dem Eigenwertproblem von \mathbf{M} und $\underline{\mathcal{F}}_\mu^{tr} \cdot \underline{e}_\nu = \delta_{\mu,\nu}$ der Orthonormierung von Links- und Rechtseigenvektoren, $\underline{\mathcal{F}}_\mu$ respektive \underline{e}_ν , der Matrix \mathbf{M} . Es ist $\mu, \nu \in \{s, u\}$.

Die OGY-Bedingung ist nun gegeben durch

$$\underline{\mathcal{F}}_{u,i+1}^{tr} \cdot \Delta \underline{x}_{n+1} = 0 \quad (\text{F.13})$$

mit $\underline{\mathcal{F}}_{u,i+1}^{tr}$ hergeleitet aus $\mathbf{M}_{i+1} = \left. \frac{d\underline{f}}{d\underline{x}} \right|_{\underline{x}_{P,i+1}(0), p=0}$ für $n \in \mathbb{N}$ und i korrespondierend mit n . Beachte, daß \underline{x}_n immer in der Umgebung von $\underline{x}_{P,i}$ liegt.

Diese Bedingung bestimmt p_n^{OGY} , so daß nach der Abweichung $\Delta \underline{x}_n$ im nächsten Zeitschritt die Abweichung $\Delta \underline{x}_{n+1}$ entlang der stabilen Richtung, d.h. der linearisierten stabilen Manigfaltigkeit, des periodischen Punktes $\underline{x}_{P,i+1}$ liegt. Dabei hängt die Abweichung $\Delta \underline{x}_{n+1}$ von dem zu bestimmenden p_n^{OGY} ab. Also soll die Komponente entlang der instabilen Richtung die OGY-Bedingung der Gleichung F.13 erfüllen. Mit Gleichung F.3 ergibt dies

$$0 = \underline{\mathcal{F}}_{u,i+1}^{tr} \cdot (\mathbf{M}_i \Delta \underline{x}_n + \underline{h}_i p_n),$$

also

$$p_n^{OGY} = \frac{-1}{\underline{\mathcal{F}}_{u,i+1}^{tr} \cdot \underline{h}_i} \underline{\mathcal{F}}_{u,i+1}^{tr} \mathbf{M}_i \cdot \Delta \underline{x}_n. \quad (\text{F.14})$$

Unter Benutzung der Beziehung $\underline{h}_i = (\underline{g}_{i+1} - \mathbf{M}_i \cdot \underline{g}_i)$ von Gleichung F.11 und der Eigenvektorzzerlegung von \mathbf{M}_i (siehe Gleichung F.12) ergibt sich der von Ott, Grebogi und Yorke (1990(b))² [89] gelieferte Ausdruck für höhere Perioden:

$$p_n^{OGY} = \frac{-1}{\underline{\mathcal{F}}_{u,i+1}^{tr} \cdot \underline{g}_{i+1} - \lambda_{u,i} \cdot \underline{\mathcal{F}}_{u,i}^{tr} \cdot \underline{g}_i} \lambda_{u,i} \underline{\mathcal{F}}_{u,i}^{tr} \cdot \Delta \underline{x}_n.$$

²Ott, E., Grebogi, C. & Yorke, J.A. [1990,b] Controlling chaotic dynamical systems, in *CHAOS, Soviet-American Perspectives on Nonlinear Sciences*, ed. D.K. Campbell (American Inst. of Physics, New York) pp. 135–172, dort speziell Gleichung 2.29, p. 165.

F.2.2 Least-Squares-Methoden

Die OGY-Bedingung kann ersetzt werden durch eine Least-Squares-Minimierung der Einschnittabweichung des zukünftigen Zustandes, d.h. die Grundidee ist hier, $\|\Delta \underline{x}_{n+1}(p)\|^2$ zu minimieren. Also bezeichnen wir den folgenden Ausdruck als LS-Bedingung:

$$\frac{\partial}{\partial p} \|\Delta \underline{x}_{n+1}(p)\|^2 = 0 \quad , \quad (\text{F.15})$$

mit euklidischer Norm $\|\underline{x}\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{\ell} (x_i)^2}$ für $\underline{x} \in \mathbf{R}^{\ell}$. Wenn wir diese Minimierung ausführen, so ist die daraus folgende Kontrolle im allgemeinen nichtlinear in \underline{x}_n . Aus der Bedingung in Gleichung F.15 erhalten wir

$$\left(\frac{df(\underline{x}_n; p)}{dp} \right)^{tr} \cdot (f(\underline{x}_n; p) - \underline{x}_{P,i+1}) = 0 \quad ,$$

d.h. p_n^{LS} ist eine Funktion von \underline{x}_n und $\underline{x}_{P,i}$

$$p_n^{LS} = p_n^{LS}(\underline{x}_n, \underline{x}_{P,i}) \quad . \quad (\text{F.16})$$

Die Least-Squares-Bedingung angewendet auf die Linearisierung der Dynamik $f(\underline{x}; p)$ liefert eine neue Kontrolle, die wir LLS-Kontrolle nennen. Sie wird durch die folgende Bedingung gegeben:

$$\frac{\partial}{\partial p} \|\mathbf{M}_i \Delta \underline{x}_n + \underline{h}_i p\|^2 = 0 \quad . \quad (\text{F.17})$$

Von dieser Bedingung können wir einen Ausdruck ähnlich dem der OGY-Kontrollbedingung $\underline{\mathcal{F}}_{u,n+1}^{tr} \cdot \Delta \underline{x}_{n+1} = 0$ (siehe Gleichung F.13) herleiten, die wie folgt aussieht:

$$\underline{h}_i^{tr} \cdot \Delta \underline{x}_{n+1} = 0 \quad , \quad (\text{F.18})$$

und ebenso einen ähnlichen Ausdruck für den Kontrollparameter liefert

$$p_n^{LLS} = \frac{-1}{\underline{h}_i^{tr} \cdot \underline{h}_i} \underline{h}_i^{tr} \mathbf{M}_i \cdot \Delta \underline{x}_n \quad . \quad (\text{F.19})$$

Diese letzte Formel ist auch von Reyl *et al.* (1993) [95] betrachtet worden, allerdings unter Nichtberücksichtigung des Indexes i . Die Beziehung zwischen dem theoretisch eleganten **Dynamikkontrollvektor** \underline{h}_i und dem experimentell leicht zugänglichen **Periodenpunktkontrollvektor** \underline{g}_{i+1} (siehe Gleichung F.11) ist genau hinter diesem Index verborgen.

Gleichung F.19 zeigt, daß der Vektor $\underline{\mathcal{F}}_{u,i}$, der in der OGY-Methode auftaucht (siehe Gleichung F.14), in der LLS-Methode ersetzt wird durch den Vektor \underline{h}_i , der in beiden Methoden ohnehin zu berechnen ist. Dies demonstriert die einfachere Berechnung der LLS-Kontrolle. Zudem zeigt sie bei Hénon-ähnlichen Abbildungen auch bessere Kontrolleigenschaften (Stollenwerk & Pasemann, 1996(a)) [2].

F.2.3 Eingangskontrolle im Zweineuronenmodul

Wir zeigen hier die Ergebnisse der verschiedenen Kontrollmethoden in Anwendung auf das Zweineuronenmodul mittels einer Kontrollmöglichkeit, der Eingangskontrolle, da diese im Kapitel 8 benutzt wird. Für die Anwendung auch auf Gewichtskontrollen siehe Stollenwerk & Pasemann (1996(a)) [2].

Wir betrachten die Eingangskontrolle in das x -Neuron des Zweineuronenmoduls:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (\vartheta_1 + p_n) + w_{11} \cdot \sigma(x_n) + w_{12} \cdot \sigma(y_n) , \\ y_{n+1} &= \vartheta_2 + w_{21} \cdot \sigma(x_n) . \end{aligned} \quad (\text{F.20})$$

Die drei Methoden für diese Eingangskontrolle liefern folgende Ergebnisse: Für die Least-Squares-Kontrolle LS ergibt sich

$$p_n^{LS} = w_{11}(\sigma(x_{P,i}) - \sigma(x_n)) + w_{12}(\sigma(y_{P,i}) - \sigma(y_n)) , \quad (\text{F.21})$$

für deren Linearisierung LLS

$$p_n^{LLS} = -(w_{11}\sigma'(x_{P,i}) , w_{12}\sigma'(y_{P,i})) \cdot \begin{pmatrix} x_n - x_{P,i} \\ y_n - y_{P,i} \end{pmatrix} , \quad (\text{F.22})$$

und für die OGY-Kontrolle

$$p_n^{OGY} = -(k^{OGY} \cdot w_{11}\sigma'(x_{P,i}) , w_{12}\sigma'(y_{P,i})) \cdot \begin{pmatrix} x_n - x_{P,i} \\ y_n - y_{P,i} \end{pmatrix} \quad (\text{F.23})$$

mit der Konstanten k^{OGY} , die den Unterschied zwischen OGY und LLS angibt:

$$k^{OGY} := 1 - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + 4c})$$

mit

$$c := \frac{|w_{12}w_{21}|}{w_{11}^2} \cdot \frac{\sigma'(y_{P,i})}{\sigma'(x_{P,i})} .$$

F.3 Verzögerte Kontrolle

Wir wollen nun die Kontrolle in einem separaten Neuromodul implementieren, das in seiner Dynamik parallel zu der des chaotischen Zweineuronenmoduls läuft. Dazu müssen wir die Zeit berücksichtigen, die zur Berechnung der Kontrolle nötig ist. Wir nehmen an, daß diese Berechnung in nur einer weiteren Neuronenschicht erfolgen kann. Dann müssen wir die Kontrolle so berechnen, daß sie das System erst einen Zeitschritt später beeinflusst, eine Betrachtung, die bei rein algorithmisch gegebenen Kontrollen nicht nötig ist.

Also betrachten wir die Dynamik

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (\vartheta_1 + p_n) + w_{11} \cdot \sigma(x_n) + w_{12} \cdot \sigma(y_n) , \\ y_{n+1} &= \vartheta_2 + w_{21} \cdot \sigma(x_n) , \\ p_{n+1} &= p_{n+1}(x_n, y_n) , \end{aligned} \quad (\text{F.24})$$

für die die Kontrollfunktion $p_{n+1}(x_n, y_n)$ bestimmt werden muß. Dies wird verzögerte Kontrolle genannt.

Im Allgemeinen hängt die Entwicklung des Systems von der gesamten Geschichte der Kontrolle ab. Für unser Problem müssen wir zwei Kontrollschritte in der Least-Squares-Kontrolle berücksichtigen, woraus in Verallgemeinerung der Rechnungen des vorherigen Abschnittes folgt:

$$\|\Delta_{x_{n+2}}(p_n, p_{n+1})\|^2 \stackrel{!}{=} \min$$

und damit

$$\frac{\partial}{\partial p_n} \|\Delta \underline{x}_{n+2}\|^2 = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial p_{n+1}} \|\Delta \underline{x}_{n+2}\|^2 = 0 \quad .$$

Unter Benutzung der Linearisierung der Dynamik \mathbf{M}_i und h_i erhalten wir

$$\begin{aligned} \Delta \underline{x}_{n+2} &= \mathbf{M}_{i+1} \cdot \Delta \underline{x}_{n+1} + \underline{h}_{i+1} \cdot p_{n+1} + \text{höhere Ordnungen} \\ &= \mathbf{M}_{i+1} \mathbf{M}_i \cdot \Delta \underline{x}_n + \mathbf{M}_{i+1} \underline{h}_i \cdot p_n + \underline{h}_{i+1} \cdot p_{n+1} \\ &= \mathbf{M}_{i+1} \mathbf{M}_i \cdot \Delta \underline{x}_n + \left(\begin{array}{c} \underline{h}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{M}_{i+1} \underline{h}_i \end{array} \right) \begin{pmatrix} p_n \\ p_{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

wobei $(\underline{h}; \tilde{\underline{h}})$ die (2×2) -Matrix bezeichnet, die man aus der Spalte \underline{h} durch Hinzufügung der Spalte $\tilde{\underline{h}}$ erhält.

Mit der Definition $\underline{d} := \mathbf{M}_{i+1} \mathbf{M}_i \cdot \Delta \underline{x}_n$, dann $\underline{p} := (p_n, p_{n+1})^{tr}$ und der Kontrollierbarkeitsmatrix \mathbf{C} , definiert durch

$$\mathbf{C} := \left(\begin{array}{c} \underline{h}_{i+1} \\ \vdots \\ \mathbf{M}_{i+1} \underline{h}_i \end{array} \right) \quad ,$$

ergibt die Evaluierung der Least-Squares-Bedingung das Resultat

$$\underline{p} = -(\mathbf{C}^{tr} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^{tr} \underline{d} \quad , \quad (\text{F.25})$$

wenn die quadratische Matrix $(\mathbf{C}^{tr} \mathbf{C})$ invertierbar ist. Anderenfalls müssen wir die Penrose-Pseudoinverse \mathbf{C}^+ benutzen, wie sie in Abschnitt 3.1 in der Singulärwertzerlegung definiert ist (Gleichung 3.22). Damit ist generell

$$\underline{p} = -\mathbf{C}^+ \underline{d} \quad .$$

Wenden wir das Ergebnis der Gleichung F.25 auf die Eingangskontrolle in Gleichung F.20 an, so erhalten wir

$$\mathbf{M}_i = \left(\begin{array}{cc} w_{11} \sigma'(x_{P,i}) & w_{12} \sigma'(y_{P,i}) \\ w_{21} \sigma'(x_{P,i}) & 0 \end{array} \right) =: \left(\begin{array}{cc} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & 0 \end{array} \right) \quad , \quad \underline{h}_i = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right) \quad .$$

Wir nehmen hier Invertierbarkeit von $(\mathbf{C}^{tr} \mathbf{C})$ an und erhalten mittels Gleichung F.25

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_{i+1} \gamma_i & 0 \\ -\alpha_i & -\beta_i \end{pmatrix} \cdot \Delta \underline{x}_n \quad .$$

Aus diesem Resultat erhalten wir für die instantane Kontrolle

$$p_n = \left(-\alpha_i \quad , \quad -\beta_i \right) \cdot \Delta \underline{x}_n \quad ,$$

was das alte Resultat des vorigen Abschnittes darstellt, und für die verzögerte Kontrolle

$$p_{n+1} = \left(-\beta_{i+1} \cdot \gamma_i \quad , \quad 0 \right) \cdot \Delta \underline{x}_n$$

(vergleiche auch Stollenwerk, 1995 [1]). Diese letztere Formel werden wir nun zur Konstruktion einer konsistenten Selbstkontrolle unseres Neuromodules benutzen.

F.4 Konsistente Selbstkontrolle

Die gerade hergeleitete Kontrolle hat die Form

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= -\beta_{i+1}\gamma_i \cdot (x_n - x_{P,i}) \\ &= -w_{12} \sigma'(y_{P,i+1}) \cdot w_{21} \sigma'(x_{P,i}) \cdot (x_n - x_{P,i}) \\ &\approx -w_{12}w_{21} \sigma'(y_{P,i+1}) \cdot (\sigma(x_n) - \sigma(x_{P,i})) \end{aligned} \quad (\text{F.26})$$

unter Benutzung der Approximation $\sigma(x_n) - \sigma(x_{P,i}) \approx \sigma'(x_{P,i}) \cdot (x_n - x_{P,i})$. Hieraus ersehen wir, daß die Verzögerungskontrolle nur von der x_n -Komponente der Modulaktivität abhängt, d.h. $p_{n+1} = p_{n+1}(x_n)$. Wir definieren schließlich

$$p^{delay}(x_n) := -w_{12}w_{21} \sigma'(\vartheta_2 + w_{21}\sigma(x_{P,i})) \cdot (\sigma(x_n) - \sigma(x_{P,i})) \quad (\text{F.27})$$

oder entsprechend

$$p^{delay}(x_n) := \varphi_i \sigma(x_n) + \psi_i \quad (\text{F.28})$$

mit Koeffizienten $\varphi_i(x_{P,i})$ und $\psi_i(x_{P,i})$, die nur noch von den periodischen Punkten $x_{P,i}$ abhängen.

F.4.1 Approximation der Kontrollregion

Die Forderung der nur lokal wirkenden Kontrolle, d.h. kleiner Kontrollsignale p , kann ausgedrückt werden durch die Abschneidefunktion

$$\Phi_{p^*}(p) := \begin{cases} p & \text{für } |p| < p^* \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Eine Kombination aus vier Sigmoiden modelliert die Abschneidefunktion ausreichend, um Kontrolle zu erreichen. Das Ergebnis einer guten Anpassung sieht man in Abbildung 8.2.

Die Anpassung für Φ wird wie folgt konstruiert: Zwei Sigmoiden werden zu einem Keil kombiniert, um zunächst den rechten Teil von Φ zu modellieren

$$\Phi_r(x) := \sigma(ax + d) - \sigma(bx - e)$$

und entsprechend für die linke Seite von Φ

$$\Phi_\ell := -\Phi_r(-x)$$

Dann ist per Konstruktion die Funktion

$$\Phi_k(x) := k \cdot [\Phi_r(x - c) + \Phi_\ell(x + c)]$$

antisymmetrisch. Der Parametervektor $\underline{k} := (k, a, b, c, d, e)^{tr}$ in Φ_k charakterisiert die Approximation der Abschneidefunktion Φ_{p^*} . Unter Berücksichtigung der Symmetrie der Sigmoiden $\sigma(-x) = 1 - \sigma(x)$ erhalten wir die Approximationsfunktion Φ_k in der Form einer gewichteten Summe von Sigmoiden

$$\Phi_k(x) = k \cdot [\sigma(ax - \alpha) - \sigma(bx - \beta) - \sigma(bx + \beta) + \sigma(ax + \alpha)] \quad (\text{F.29})$$

mit $\alpha := a \cdot c - d$ und $\beta := b \cdot c + e$. Im Folgenden benutzen wir die Abschneideapproximation mit Parametern

$$\underline{k} = \begin{pmatrix} k \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 50 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Allerdings kann für unsere Kontrollzwecke ein ernstes Problem dann auftauchen, wenn die Abschneideapproximation unzureichend ist nahe am Ursprung. Dann brauchen die kontrollierten periodischen Orbits nicht die ursprünglichen UPOs des chaotischen Attraktors zu sein, sie können sogar außerhalb des Attraktors liegen. Die entscheidende Forderung ist, daß kleine Kontrollsignale exakt reproduziert werden müssen. D.h. die Steigung der Abschneideapproximation $\Phi_{\underline{k}}$ soll gleich 1 sein am Ursprung, also

$$\left. \frac{d\Phi_{\underline{k}}(x)}{dx} \right|_{x=0} = 1 \quad .$$

Diese Nebenbedingung ist erfüllt mit der folgenden Bedingung für den Parametervektor \underline{k} :

$$2k (a \sigma'(\alpha) - b \sigma'(\beta)) = 1 \quad .$$

Lösen dieser Gleichung mit Konstanten a, b, c, d, e wie vorher, d.h. mit dem Vektor $\underline{k} = (k, 5, 50, 1, 3, 1)^{tr}$, liefert

$$k = \frac{\frac{1}{2}}{a \sigma'(\alpha) - b \sigma'(\beta)} = 0,952439 \quad .$$

Der numerische Wert $k = 0,95$ liegt nahe der ursprünglichen Annahme von $k = 1$. Schließlich müssen wir $\Phi_{\underline{k}}$ skalieren auf passende Abschneidegröße p^* und definieren

$$\Phi_{\underline{k}^*}(x) := p^* \cdot \Phi_{\underline{k}}(x/p^*)$$

mit Parametern $k^* := k \cdot p^*$ und $a^* := a/p^*$, $b^* := b/p^*$ im Parametervektor $\underline{k}^* = (k^*, a^*, b^*, c, d, e)^{tr}$.

Durch Anwendung der Approximation der Abschneidefunktion $\Phi_{\underline{k}^*}(x)$ auf die Verzögerungskontrolle p^{delay} sind wir nun in der Lage, ein kontrollierendes Netzwerk in Anbindung an das chaotische Modul zu konstruieren mit den folgenden Eigenschaften: UPOs werden durch kleine Kontrollsignale stabilisiert, wobei nur ein Typ von Neuronen benutzt wird (Konsistenzforderung), und die Kombination beider Untermodule kann als selbstkontrollierendes System betrachtet werden.

F.4.2 Konstruktion der konsistenten Selbstkontrolle

Die Stabilisierung eines ganzen instabilen periodischen Orbits kann schon durch die Kontrolle nur in der Nachbarschaft eines einzelnen periodischen Punktes erreicht werden, wenn die Expansion auf dem gesamten periodischen Orbit kleiner ist als die durch die Kontrolle zu erzielende Kontraktion. Da die Konstanten in p^{delay} von den Koordinaten des aktuell gewählten periodischen Punktes \underline{x}_{P,i_s} abhängen, bildet die Kombination von $\Phi_{\underline{k}^*}$ mit p^{delay} lokale Kontrollregionen im Zustandsraum um die entsprechenden periodischen Punkte. Wegen der Verzögerungskontrolle müssen die für die Einpunktkontrolle gewählten Punkte \underline{x}_{P,i_s} im nächsten Zeitschritt auf die am meisten kontrahierende Region des Attraktors abgebildet werden.

Das Kontrollsignal $p_{n+1} = \Phi_{\underline{k}^*}(p^{delay}(\underline{x}_n))$ für einen einzelnen ausgewählten Punkt wird durch vier Sigmoidenneuronen mit Aktivität $z_{\mu,n}$, $\mu = 1, 2, 3, 4$ erzeugt. Ihre Eingangssignale sind durch gewichtete Ausgaben des chaotischen Moduls gegeben. In unserem Falle (Gleichung F.27) brauchen wir nur die Aktivität des inhibitorischen Neurons. Die Ausgaben dieser zwischengeschalteten Neuronen $\sigma(z_n)$ projizieren zurück auf das inhibitorische Neuron des chaotischen Moduls. Das Kontrollmodul wird also realisiert als ein einschichtiges Feedforward-Netz.

Mit der Übereinkunft, daß $\sigma(\underline{x})$ die komponentenweise Anwendung der Funktion σ auf \underline{x} bezeichnet, so daß wir einen Vektor derselben Dimension wie \underline{x} erhalten,

können wir das System, welches aus chaotischem und Kontrollmodul zusammengesetzt ist, schreiben als

$$\begin{aligned}\underline{x}_{n+1} &= \underline{\vartheta} + W \cdot \sigma(\underline{x}_n) + V \cdot \sigma(\underline{z}_n) \\ \underline{z}_{n+1} &= \underline{\theta} + U \cdot \sigma(\underline{x}_n)\end{aligned}, \quad (\text{F.30})$$

mit $\underline{x} = (x, y)^{tr}$, $\underline{z} = (z_1, \dots, z_4)^{tr}$ und dem Schwellenterm und Gewichtsmatrizen spezifiziert durch

$$\underline{\vartheta} = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\underline{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_4 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ u_2 & 0 \\ u_3 & 0 \\ u_4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für eine einzelne Kontrollregion könne die Netzwerkparameter $\underline{\theta}$, U und V ausgedrückt werden mittels der Parameter φ_i und ψ_i der Verzögerungskontrolle und des Parametervektors \underline{k}^* , der die approximierte Abschneidefunktion charakterisiert, also

$$\begin{aligned}u_1 &= a^* \varphi_i & \theta_1 &= a^* \psi_i - \alpha & v_1 &= k^* \\ u_2 &= b^* \varphi_i & \theta_2 &= b^* \psi_i - \beta & v_2 &= -k^* \\ u_3 &= b^* \varphi_i & \theta_3 &= b^* \psi_i + \beta & v_3 &= -k^* \\ u_4 &= a^* \varphi_i & \theta_4 &= a^* \psi_i + \alpha & v_4 &= k^*\end{aligned}.$$

Damit ist die Kontrolle vollständig konsistent in einem Neuromodul bestehend aus chaotischem und kontrollierendem Untermodul in einheitlichen Sigmoidenneuronen als durchgängiges dynamische System formuliert.

F.5 Die Pyragas-Kontrolle für zeitkontinuierliche Systeme

Wir stellen abschließend noch eine weitere Methode zur Kontrolle chaotischer dynamischer Systeme dar, die speziell für zeitkontinuierliche Systeme passend ist: die nach Pyragas (1992) [93] benannte Pyragas-Kontrolle (siehe auch Kittel, Parisi & Pyragas, 1995³ [94]). In dieser Methode wird ein instabiler periodischer Orbit in einem chaotischen Attraktor stabilisiert, indem man die Differenz eines zeitverzögerten Signals mit dem aktuellen Signal in den Bewegungsgleichungen bildet und die Zeitverzögerung solange variiert, bis die Differenz zu Null wird, d.h. das Gesamtsystem periodisch mit Periodenlänge gleich der Verzögerungszeit ist.

Wir werden diese Methode hier an einem zeitkontinuierlichen Zweineuronensystem mit zeitverzögerten Übertragungsleitungen darstellen (Lourenço & Babloyantz, 1994⁴ [98]). Obwohl die Kontrolle wieder algorithmisch gegeben ist, kann man sich auch in diesem System eine Realisierung in konsistenter Weise mit gleichartigen Neuronen im chaotischen wie im kontrollierenden Modul vorstellen.

Die Pyragas-Kontrolle eignet sich auch für die medizinische Kontrolle von neurophysiologischen Systemen, da die Meßsignale zeitkontinuierlich gegeben sind und ein stimulierendes Signal einfach durch zeitverzögertes Wiedereinspeisen in das System technisch problemlos zu realisieren sein wird.

³Kittel, A., Parisi, J. & Pyragas, K. (1995) Delayed feedback control of chaos by self-adapted delay time, *Phys. Lett. A* 198, 433–436.

⁴Lourenço, C. & Babloyantz, A. (1994) Control of chaos in networks with delay: A model for synchronization of cortical tissue, *Neural Computation* 6, 1141–1154.

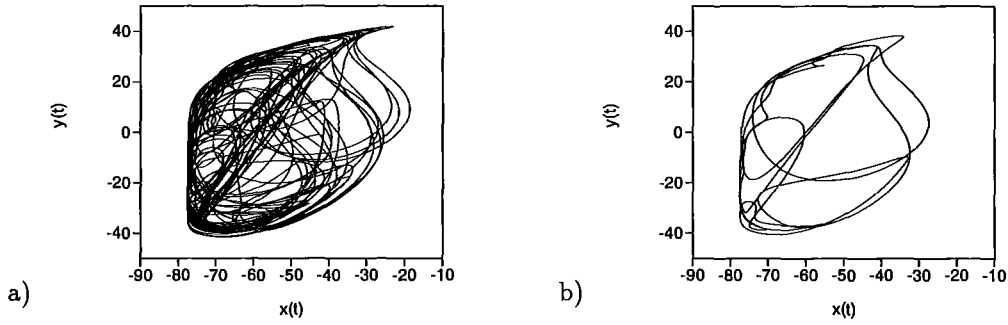


Abbildung F.1: a) Chaotischer Attraktor des zeitkontinuierlichen Zweineuronensystems mit verzögerten Weiterleitungen und b) deren kontrollierter instabiler Orbit. Die Kontrolle ist mit dem Pyragas-Algorithmus durchgeführt.

F.5.1 Chaotisches zeitkontinuierliches Neuronenmodell

Betrachte das exzitatorische postsynaptische Potential $x(t)$ und das inhibitorische $y(t)$ eines Zweineuronenmoduls mit folgender Dynamik:

$$\dot{x} = -\gamma(x - V_L) - (x - E_1) \cdot \Omega_1 \cdot \sigma(\alpha_x(x(t-\tau) - V_c)) - (x - E_2) \cdot \Omega_2 \cdot \sigma(\alpha_y(y(t-\tau) - V_c)) \quad (\text{F.31})$$

und

$$\dot{y} = -\gamma(y - V_L) - (y - E_1) \cdot \Omega_3 \cdot \sigma(\alpha_x(x(t-\tau) - V_c)) - (y - E_2) \cdot \Omega_4 \cdot \sigma(\alpha_y(y(t-\tau) - V_c)) \quad (\text{F.32})$$

mit der Sigmoidale als Übertragungsfunktion mit Übertragungsverzögerung τ . Die biologisch motivierten Parameter sind: die inverse Membrankonstante $\gamma = 0,25 \text{ msec}^{-1}$, das Ruhepotential der Neuronen $V_L = -60 \text{ mV}$, das Gleichgewichtspotential des exzitatorischen Transmitters $E_1 = 50 \text{ mV}$, das des inhibitorischen $E_2 = -80 \text{ mV}$, die Feuerschwelle der Neuronen $V_c = -25 \text{ mV}$, die exzitatorische Sigmoidensteilheit $\alpha_x = 0.09 \text{ mV}^{-1}$, die inhibitorische $\alpha_y = 0.2 \text{ mV}^{-1}$ und die noch weitgehend frei wählbaren Verbindungsgewichte $\Omega_1 = 6.3$, $\Omega_2 = 5$, $\Omega_3 = 5$ und $\Omega_4 = 0$. Für die Übertragungsverzögerung $\tau = 16 \text{ msec}$ ergibt sich der in Abbildung F.1 a) gezeigte chaotische Attraktor (Lourenço & Babloyantz, 1994) [98]. Das dynamische System in Vektorschreibweise lautet

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{x}(t - \tau)) \quad (\text{F.33})$$

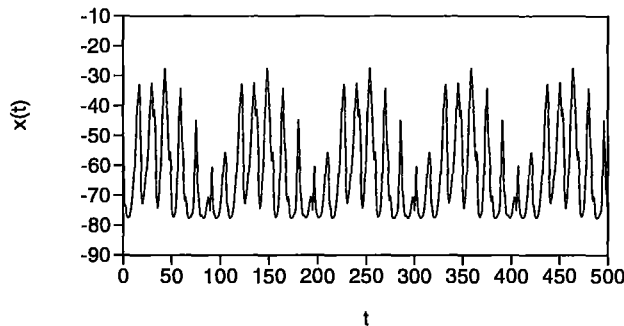


Abbildung F.2: Die Zeitreihe des periodischen Orbits zeigt mehrere Durchläufe durch die Periode in exakt gleicher Weise.

F.5.2 Pyragaskontrolle

Dieses chaotische System kann nun in folgender Weise kontrolliert werden: Wir betrachten das dynamische System, welches einschließlich des Kontrollsignals gegeben ist durch

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{x}(t - \tau)) + \underline{\varepsilon}(t) \quad . \quad (\text{F.34})$$

Das Kontrollsignal ist

$$\underline{\varepsilon}(t) := \begin{pmatrix} \varepsilon_x(t) \\ \varepsilon_y(t) \end{pmatrix} = K \cdot \underline{D}(t) \quad . \quad (\text{F.35})$$

Dieses Kontrollsignal sei klein, d.h. $\underline{D}(t) = (0, 0)^{tr}$ für $\|\underline{\varepsilon}(t)\| \geq \varepsilon_0$, ansonsten proportional zur Differenz zwischen Ausgangssignal zur Zeit t und dem zur Zeit $(t - T)$ mit Verzögerungszeit T , also

$$\underline{\varepsilon}(t) = K \cdot (\underline{x}(t - T) - \underline{x}(t)) \quad (\text{F.36})$$

mit $\varepsilon_0 = 0.3 \text{ mV/msec}$ und $K = 0.275 \text{ msec}^{-1}$. Für die Verzögerungszeit $T = 105.3 \text{ msec}$. ergibt sich eine Nullstelle der Differenz $\|\underline{D}\|$, also ein periodischer Orbit mit derselben Verzögerungszeit T . Dieser Orbit ist in Abbildung F.1 b) gezeigt.

Abbildung F.2 zeigt die Zeitreihe des periodischen Orbits aus dem Phasenraumplot F.1 b). Das Signal ist tatsächlich periodisch, wenn auch der Grenzzyklus eine komplizierte Trajektorie zeigt. Man kann hier wirklich von einem Grenzzyklus sprechen, da der periodische Orbit nach erfolgreicher Einbeziehung des Kontrollsignals tatsächlich anziehend ist. In unserer Simulation lag jeweils der Startwert (wegen des Delaygleichungssystems hier ein ganzes Trajektorienstück) außerhalb der Attraktortrajektorie.

Literaturverzeichnis

Eigene Beiträge zum Thema:

- [1] Stollenwerk, N. (1995) Self-controlling chaos in neuromodules, in: *Supercomputing in Brain Research - From Tomography to Neural Networks* eds. H. Herrmann, E. Pöppel, D. Wolf, (World Scientific, Singapore), 421–426.
- [2] Stollenwerk, N., & Pasemann, F. (1996(a)) Control Strategies for Chaotic Neuromodules, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **6**, 693–703.
- [3] Stollenwerk, N., & Pasemann, F. (1996(b)) Consistent neurocontrol of chaotic neuromodules, *manuscript, published as*: Pasemann, F., & Stollenwerk, N. (1998) Attractor switching by neural control of chaotic neurodynamics, *Max-Planck-Institut für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig, preprint no.: 7, 1998*.
- [4] Stollenwerk, N., & Pasemann, F. (1996(c)) Switching in Self-Controlled Chaotic Neuromodules, *World Congress on Neural Networks, San Diego, California*, Sept. 15–18, 1996, (pp. 680–684). INNS Press and Lawrence Erlbaum, New Jersey.
- [5] Stollenwerk, N., & Pasemann, F. (1996(d)) Selbstkonsistente neuronale Chaoskontrolle: Schalten zwischen periodischen Attraktoren, in: *Beiträge zum 2. Cottbuser Workshop "Aspekte neuronalen Lernens", CoWAN '96, 30.9.–2.10.1996* eds. L. Cromme, J. Wille, T. Kolb, (Reihe Mathematik M-08/1996 der Fakultät für Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik der TU Cottbus), 101–110.
- [6] Stollenwerk, N. (1996) Self-Controlling Chaos in Neuromodules: The Model and Implications for Attention, in M.J. van der Heyden, J. Mursic-Flögel, K. Weigl (Eds.), *HELNET '94/'95*, (pp. 186–197). VU University Press, Amsterdam.
- [7] Stollenwerk, N. (1992) Diplomarbeit, RWTH, Aachen.
- [8] Drepper, F.R., Engbert, R., & Stollenwerk, N. (1994) Nonlinear time series analysis of empirical population dynamics, *Ecological Modelling* **75/76**, 171–181.
- [9] Suzuki, T., & Stollenwerk, N. (1997) Chaotic response to periodic stimulation in hippocampus in freely moving rats relates to epileptic behavior, *in preparation*.
- [10] Menéndez de la Prida, L., Stollenwerk, N., & Sánchez-Andrés, J.V. (1996) On evidence for nonlinearities in immature CA1 hippocampal neuronal activity, *manuscript*.
- [11] Stollenwerk, N., Menéndez de la Prida, L., & Sánchez-Andrés, J.V. (1997) Spontaneous Activity of Hippocampal Cells in Various Physiological States, *contribution to IWANN '97, Lanzarote, June, 3–10*, (pp. 91–102), Lecture Notes in Computer Sciences 1240, eds. J. Mira, R. Moreno-Díaz, J. Cabestany.
- [12] Menéndez de la Prida, L., Stollenwerk, N., & Sánchez-Andrés, J.V. (1997) Bursting as a source for predictability in biological neural networks activity, *Physica D* **110**, 323–331.

Nichtlineare Dynamik und Zeitreihenanalyse:

- [13] Oseledec, V. (1968) A multiplicative ergodic theorem - Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, *Trans. Moscow Math. Soc.* **19**, 197.
- [14] Ruelle, D., & Takens, F. (1971) On the Nature of Turbulence, *Commun. Math. Phys.* **20**, 167–192. Siehe auch *Commun. Math. Phys.* **23** (1971), 343–344.

- [15] Hénon, M. (1976) A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor, *Comm. math. Phys.* **50**, 69–77.
- [16] May, R.M. (1976) Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* **261**, 459–467.
- [17] Grossmann, S. & Thomae, S. (1977) Invariant Distributions and Stationary Correlation Functions of One-Dimensional Discrete Processes, *Zeitschrift für Naturforschung* **32 a**, 1353–63.
- [18] Packard, N.H., Crutchfield, J.P., Farmer, J.D. & Shaw, R.S. (1980) Geometry from a Time Series, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 712–716.
- [19] Takens, F. (1981) Detecting strange attractors in turbulence, in: *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980* eds. D. Rand, L.S. Young *Lecture Notes in Mathematics* **898** (Springer, Berlin) 366 ff.
- [20] Grassberger, P. & Procaccia, I. (1983) On the characterization of strange attractors, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 346–349.
- [21] Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L. & Vastano, J.A. (1985) Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica D* **16**, 285–317.
- [22] Theiler, J. (1986) Spurious dimension from correlation algorithms applied to limited time-series data, *Phys. Rev. A* **34**, 2427–32.
- [23] Halsey, T.C., Jensen, M.H., Kadanov, L.P., Procaccia, I., & Shraiman, B.I. (1986) Fractal measurements and their singularities: The characterization of strange sets, *Phys. Rev. A* **33**, 1141–51.
- [24] Eckmann, J.P., Kamphorst, S.O. & Ruelle, D. (1987) Recurrence Plots of Dynamical Systems, *Europhys. Lett.* **4**, 973–977.
- [25] Farmer, J.D. & Sidorowich, J.J. (1987) Predicting chaotic time series, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 845–848.
- [26] Broomhead, D. & Lowe, D. (1988) Multivariable function interpolation and adaptive networks, *Complex Systems* **2**, 321–355.
- [27] Casdagli, M. (1989) Nonlinear prediction of chaotic time series, *Physica D* **35**, 335–356.
- [28] Osborne, A.R. & Provenzale, A. (1989) Finite correlation dimension for stochastic systems with power-law spectra, *Physica D* **35**, 357–381.
- [29] Sugihara, G. & May, R.M. (1990). Nonlinear forecasting as a way of distinguishing chaos from measurement errors in time series, *Nature* **344**, 734–741.
- [30] Grassberger, P., Schreiber, T. & Schaffrath, C. (1991) Nonlinear Time Sequence Analysis, *Int. J. Bif. Chaos* **1**, 521–547.
- [31] Sauer, T., Yorke, J.A., & Casdagli, M. (1991) Embedology, *J. Stat. Phys.* **65**, 579–616.
- [32] Martin Casdagli (1992) Chaos and Deterministic versus Stochastic Non-linear Modelling, *J. Royal Statistical Society, London, Series B (Methodological)*, **54**, No. 2, 303–328.
- [33] Theiler, J., Eubank, S., Longtin, A., Galdrikian, B. & Farmer, J.D. (1992) Testing for nonlinearity in time series: The method of surrogate data, *Physica D* **58**, 77–94.
- [34] Rapp, P.E., Albano, A.M., Zimmerman, I.D. & Jiménez-Montaño (1994) Phase-randomized surrogates can produce spurious identifications of non-random structure, *Phys. Lett. A* **192**, 27–33.
- [35] Schiff, S.J., Sauer, T., & Chang, T. (1994) Discriminating Deterministic versus Stochastic Dynamics in Neuronal Activity, *Integrative Physiological and Behavioral Science* **29**, 246–261.
- [36] Sauer, T. (1994) Reconstruction of dynamical systems from interspike intervals, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3811–3814.
- [37] Sauer, T. (1995) Interspike interval embedding of chaotic signals, *Chaos*, **5**, 127–132.

- [38] Pincus, S. (1995) Approximate Entropy (ApEn) as a complexity measure, *Chaos* **5**, 110–117.
- [39] Diks, C., van Houwelingen, J.C., Takens, F. & DeGoede, J. (1995) Reversibility as a criterion for discriminating time series, *Phys. Lett. A* **201**, 221–228.
- [40] Schreiber, T. & Schmitz, A. (1996) Improved Surrogate Data for Nonlinearity Tests, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 635–638.

Epilepsie als niedrigdimensionale Dynamik:

- [41] Babloyantz, A. & Destexhe, A. (1986) Low-dimensional chaos in an instance of epilepsy, *Proc. Natl. Acad. Sciences USA* **83**, 3513–3517.
- [42] Theiler, J. (1995) On the evidence for low-dimensional chaos in an epileptic electroencephalogram, *Phys. Rev. E* **51**, 980–994.
- [43] Frank, G.W., Lookmann, T., Nerenberg, M.A.H., & Essex, c. (1990) Chaotic Time Series Analysis of Epileptic Seizures. *Physica D* **46**, 427–438.
- [44] Theiler, J., & Rapp, P.E. (1996) Re-examination of the evidence for low-dimensional, nonlinear structure in the human electroencephalogram, *EEG and clin. Neurophysiol.* **98**, 213–222.
- [45] Lehnertz, K., & Elger, C.E. (1995) Spatio-temporal dynamics of the primary epileptogenic area in temporal lobe epilepsy characterized by neuronal complexity loss, *EEG clin. Neurophysiol.* **95**, 108–117.
- [46] Friedrich, R. & Uhl, C. (1996) Spatio-temporal analysis of human electroencephalograms: Petit-mal epilepsy, *Physica D* **98**, 171–182.
- [47] Casdagli, M.C., Iasemidis, L.D., Sackellares, J.C., Roper, S.N., Gilmore, R.L., & Savit, R.S. (1996) Characterizing nonlinearity in invasive EEG recordings from temporal lobe epilepsy, *Physica D* **99**, 381–399.
- [48] Lopes da Silva, F.H., Pijn, J.P., Wadman, W.J. (1994) Dynamics of local neuronal networks: control parameters and state bifurcations in epileptogenesis, *Progress in Brain Research* **102**, 359–370.
- [49] van der Heijden, M.J., Diks, C., Pijn, J.P.M. & Velis, D.N. (1996) Time Reversibility of Intracranial Human EEG Recordings in Mesial Temporal Lobe Epilepsy, *Physics Letters A* **216**, 283–288.
- [50] Van Quyen, M.L., Martinerie, J., Adam, C., Müller-Gerking, J., Pezard, L., Renault, B., Schuster, G. & Varela, F.J. (1996) Evidence for unstable periodic orbits in subdural epileptic recordings in humans, *NeuroReport*, submitted.
- [51] Bamidis, P.D., Hellstrand, E., Lidholm, H., Abraham-Fuchs, K., & Ioannides, A.A. (1996) MFT in complex partial epilepsy: spatio-temporal estimates of interictal activity, *Neuroreport* **7**, 17–23.

Hippocampus-Präparate und -Versuche:

- [52] Treves, A., & Rolls, E.T. (1992) Computational Constraints Suggest the Need for Two Distinct Input Systems to the Hippocampal CA3 Network, *Hippocampus* **2**, 189–200.
- [53] Treves, A., & Rolls, E.T. (1994) Computational Analysis of the Role of the Hippocampus in Memory, *Hippocampus* **4**, 374–391.
- [54] Hayashi, H. & Ishizuka, S. (1995) Chaotic responses of the hippocampal CA3 region to a mossy fiber stimulation in vitro, *Brain Research* **686**, 194–206.
- [55] Chang, T., Schiff, S.J., Sauer, T. Gossard, J.P. & Burke, R.E. (1994) Stochastic versus deterministic variability in simple neuronal circuits: I Monosynaptic spinal cord reflexes, *Biophysical J.* **67**, 671–683.

- [56] Schiff, S.J., Jerger, K., Chang, T., Sauer, & Aitken, P.G. (1994(a)) Stochastic versus deterministic variability in simple neuronal circuits: II Hippocampal slices, *Biophysical J.* **67**, 684–691.
- [57] Schiff, S.J., Jerger, K., Doung, D.H., Chang, T., Spano, M.L. & Ditto, W.L. (1994(b)) Controlling chaos in the brain, *Nature* **370**, 615–620.
- [58] Christini, D.J. & Collins, J.J. (1995) Controlling neuronal noise using chaos control, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2782–2795.
- [59] Pierson, D. & Moss, F. (1995) Detecting periodic unstable points in noisy chaotic and limit cycle attractors with application to biology, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 2124–2127.
- [60] Menéndez de la Prida, L., Bolea, S. & Sánchez-Andrés, J.V. (1996) Analytical characterization of spontaneous activity evolution during hippocampal development in the rabbit, *Neurosci. Lett.* **218**, 1–3.
- [61] Menéndez de la Prida, L., & Sánchez-Andrés, J.V. (1997). Mechanisms of Synchronization in the Hippocampus and its Role along Development. *contribution to IWANN '97, Lanzarote, June, 3–10*, (pp. 154–161), Lecture Notes in Computer Sciences 1240, eds. J. Mira, R. Moreno-Díaz, J. Cabestany.
- [62] Brankač, J., Stewart, M., & Fox, S.E. (1993) Current source density analysis of the hippocampal theta rhythm: associated sustained potentials and candidate synaptic generators, *Brain Research* **615**, 310–327.
- [63] Brankač, J., Seidenbecher, T., & M.G. (1996) Task-Relevant Late Positive Component in Rats: Is it Relevant to Hippocampal Theta Rhythm? *Hippocampus* **6**.
- [64] Iijima, T., Witter, M.P., Ichikawa, M., Tominaga, T., Kajiwar, R., & Matsumoto, G. (1997) Entorhinal-Hippocampal Interactions Revealed by Real-Time Imaging, *preprint*.
- [65] Lisman, J.E. (1997) Bursts as a unit of neural information: making unreliable synapses reliable, *Trends in Neurosciences* **20**, 38–43.
- [66] Bibbig, A., Wennekers, T., & Palm, G. (1995) A neural network model of the cortico-hippocampal interplay and the representation of contexts, *Behavioural Brain Research* **66**, 169–175.
- [67] Buszáki, G., Rappelsberger, P., & Kellényi (1985) Depth Profiles of Hippocampal Rhythmic Slow Activity ('Theta Rhythm') Depend on Behaviour, *Elektroencephalography and clinical Neurophysiology* **61**, 77–88.
- [68] Papatheodoropoulos, C. & Kostopoulos, G. (1996) Age-related Changes in Excitability and Recurrent Inhibition in the Rat CA1 Hippocampal Region, *European J. Neuroscience*, **8**, 510–520.

Neuronenmodelle:

- [69] Plesser, H.E., & Tanaka, S. (1997) Stochastic resonance in a model neuron with reset, *Phys. Lett. A* **225**, 228–234.
- [70] Ricciardi, L.M., & Sato, S. (1988) First-Passage-Time Density and Moments of the Ornstein-Uhlenbeck Process, *J. Appl. Prob.* **25**, 43–57.
- [71] Jung, P. (1993) Periodically driven stochastic systems, *Phys. Rep.* **234**, 175–295.
- [72] Siegert, A.J.F. (1951) On the First Passage Time Probability Problem, *Phys. Rev.* **81**, 617–623.
- [73] Hodgkin, A.L., & Huxley, A.F. (1952) A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, *J. Physiol.* **117**, 500–544.
- [74] DeFelice, L.J., & Isaac, A. (1992) Chaotic States in a Random World: Relationship between the Nonlinear Differential Equations of Excitability and the Stochastic Properties of Ion Channels, *J. Stat. Phys.* **70**, 339–354.

- [75] Rinzel, J. (1987) A Formal Classification of Bursting Mechanisms in Excitable Systems, in *Mathematical Topics in Population Biology, Morphogenesis and Neurosciences*, ed. S. Levin, Lecture Notes in Biomathematics 71 (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg).
- [76] FitzHugh, R. (1961) Impulses and Physiological States in Models of Nerve Membrane, *Biophys. J.* 1, 445–466.
- [77] Nagumo, J., Arimoto, S., & Yoshizawa, S. (1962) An active pulse transmission line simulating nerve axon, *Proc. IRE* 50, 2061–2070.

Rekurrente Neuronale Netze:

- [78] Hopfield, J.J. (1982) Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 79, 2554–2558.
- [79] Hopfield, J.J. (1984) Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 81, 3088–3092.
- [80] Aihara, K., Takabe, T. & Toyoda, M. (1990) Chaotic neural networks, *Physics Letters* 144, 333–340.
- [81] Pasemann, F. & Nelle, E. (1993) Elements of nonconvergent neurodynamics, in *Dynamical Systems, Theorie and Applications*, eds. S.I. Andersson, A.E. Andersson, U. Ottoson, (World Scientific, Singapore) pp. 167–201.
- [82] Pasemann, F. (1995) Neuromodules: A dynamical systems approach to brain modelling, in: *Supercomputing in Brain Research - From Tomography to Neural Networks* eds. H. Herrmann, E. Pöppel, D. Wolf, (World Scientific, Singapore), 331–347.
- [83] Wennekers, T., & Pasemann, F. (1996) Synchronous Chaos in Highdimensional Modular Neural Networks, *International Journal of Bifurcation and Chaos* 6, 2055–2067.
- [84] Pasemann, F. (1996) Komplexe Neurodynamik zur Informationsverarbeitung? in: *Beiträge zum 2. Cottbuser Workshop "Aspekte neuronalen Lernens", CoWAN '96, 30.9.–2.10.1996* eds. L. Cromme, J. Wille, T. Kolb, (Reihe Mathematik M-08/1996 der Fakultät für Mathematik, Naturwissenschaften und Informatik der TU Cottbus), 75–86.
- [85] Pasemann, F. (1997) A Simple Chaotic Neuron, *Physica D* 104, 205–211.
- [86] Pasemann, F. (1996) Repräsentation ohne Repräsentation. in: *Interne Repräsentationen* eds. Rush, G., Schmidt, S.J., Breidbach, O. (Suhrkamp, Frankfurt).
- [87] Pasemann, F., & Dieckmann, U. (1997) "Evolved Neurocontrollers for Pole-Balancing", *contribution to IWANN '97, Lanzarote, June, 3–10*, (pp. 1279–1287), Lecture Notes in Computer Sciences 1240, eds. J. Mira, R. Moreno-Díaz, J. Cabestany.

Chaos-Kontrolle:

- [88] Ott, E., Grebogi, C. & Yorke, J.A. (1990(a)) Controlling chaos, *Phys. Rev. Lett.* 64, 1196–1199.
- [89] Ott, E., Grebogi, C. & Yorke, J.A. (1990(b)) Controlling chaotic dynamical systems, in *CHAOS, Soviet-American Perspectives on Nonlinear Sciences*, ed. D.K. Campbell (American Inst. of Physics, New York) pp. 135–172.
- [90] Ding, M. & Kelso, S. (1991) Controlling chaos: A selection mechanism for neural information processing, in: *Measuring Chaos in the Human Brain* eds. D. W. Duke, W. S. Pritchard, (World Scientific, Singapore), 17–31.
- [91] Babloyantz, A. & Lourenço, C. (1994) Computation with chaos: A paradigm for cortical activity, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 91, 9027–9031.
- [92] Alsing, P.M., Gavrielides, A., & Kovanis, V. (1994) Using neural networks for controlling chaos, *Physical Review*, E 49, 1225–1231.

- [93] Pyragas, K. (1992) Continuous control of chaos by self-controlling feedback, *Phys. Lett. A* **170**, 421–428.
- [94] Kittel, A., Parisi, J. & Pyragas, K. (1995) Delayed feedback control of chaos by self-adapted delay time, *Phys. Lett. A* **198**, 433–436.
- [95] Reyl, C., Flepp, L., Badii, R., & Brun, E. (1993) Control of NMR-laser chaos in high-dimensional embedding space, *Physics Review E* **47**, 267–272.
- [96] Romeiras, F.J., Grebogi, C., Ott, E., & Dayawansa, W.P. (1992) Controlling chaotic dynamical systems, *Physica*, **D 58**, 165–192.
- [97] Dressler, U. & Nitsche, G. (1992) Controlling Chaos Using Time Delay Coordinates, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 1–4.
- [98] Lourenço, C. & Babloyantz, A. (1994) Control of chaos in networks with delay: A model for synchronization of cortical tissue, *Neural Computation* **6**, 1141–1154.

Verschiedenes:

- [99] Ulam, S.M. & von Neumann, J. (1947) On combination of stochastic and deterministic processes, *Bull. Am. Math. Soc.* **53**, 1120.
- [100] Rössler, O.E. (1976) An Equation for Continuous Chaos, *Phys. Lett. A* **57**, 397–398.
- [101] Skarda, C.A. & Freeman, W.J. (1987) How brains make chaos in order to make sense of the world, *Behav. Brain Sci.* **10**, 161–195.
- [102] Maturana, H.R. & Varela, F.J. (1988) *El árbol del conocimiento* (Editorial debate, Madrid, dt. Ausgabe: Scherz, München, 1990).
- [103] Varela, F.J. (1988) *Cognitive Science, a cartography of current ideas* (dt. Ausgabe: Suhrkamp, Frankfurt am Main, 1990).
- [104] Babloyantz, A., Salazar, J.M. & Nicolis, C. (1985) Evidence of chaotic dynamics of brain activity during the sleep cycle, *Phys. Lett. A* **111**, 152–156.
- [105] Freeman, W.J. (1992) Tutorial on neurobiology: From single neurons to brain chaos, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **2**, 451–482.
- [106] Ishizuka, S., & Hayashi, H. (1996) Chaotic and phase-locked responses of the somatosensory cortex to a periodic medial lemniscus stimulation in the anesthetized rat, *Brain Research* **723**, 46–60.
- [107] Procaccia, I. (1987) Exploring deterministic chaos via unstable periodic orbits, *Nuclear Physics B, Proceedings Supplement*, **2**, 527–538.
- [108] Gunnaratne, G.H., Lindsay, P.S. & Vinson, M.J. (1989) Chaos beyond onset: A comparison of theory and experiment, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 1–4.
- [109] Kaneko, K. (1990) Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements, *Physica D* **41**, 137–172.
- [110] Kaneko, K. (1994) Relevance of dynamic clustering to biological networks, *Physica D* **75**, 55–73.
- [111] Pikovski, A.S. & Kurths, J. (1994(a)) Do Globally Coupled Maps Really Violate the Law of Large Numbers? *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1644–1646.
- [112] Pikovski, A.S. & Kurths, J. (1994(b)) Collective behavior in ensembles of globally coupled maps, *Physica D* **76**, 411–419.
- [113] Pecora, L.M., Carroll, T.L. & Heagy, J.F. (1995) Statistics for Mathematical Properties of Maps Between Time Series Embeddings, *Phys. Rev. E* **52**, 3420–3439.
- [114] Rulkov, N.F., Sushchik, M.M., Tsimring, L.S. & Abarbanel, H.D.I. (1995) Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems, *Phys. Rev. E* **51**, 980–994.
- [115] Müller-Gerking, J., Martinierie, J., Neuenschwander, S., Pezard, L., Renault, B., & Varela, F.J. (1996) Detecting non-linearities in neuro-electrical signals: a study of synchronous local field potentials, *Physica D* **94**, 65–91.

- [116] Sandkühler, J. (1993) Körpereigene Schmerzabwehr: Neue Konzepte aus der funktionellen Neuroanatomie, Neurophysiologie, Neurobiologie und Chaosforschung, *Der Schmerz* **7**, 250–261.
- [117] Debus, S. & Sandkühler, J. (1994) Low Dimensional Attractors in Discharges of Sensory Neurones in the Rat Spinal Dorsal Horn are Maintained by Supraspinal Descending Systems, *Brain Research*, submitted (1994).
- [118] Arieli, A., Sterkin, A., Grinvald, A., & Aertsen, A. (1996) Dynamics of Ongoing Activity: Explanation of the Large Variability in Evoked Cortical Responses, *Science* **273**, 1868–1871.
- [119] Sil'nikov, L.P. (1965) A case of the existence of a countable number of periodic motions, *Soviet Math. Dokl.* **6**, 163–166. Siehe auch: *Math. USSR-Sb.* **10** (1970), 91.
- [120] Babloyantz, A. (1991) Evidence for slow brain waves: a dynamical approach, *Electroencephalography and clinical Neurophysiology* **78**, 402–405.
- [121] Uhlenbeck, G.E., & Ornstein, L.S. (1930) On the theory of the Brownian motion, *Phys. Rev.* **36**, 823–841.

Lehrbücher zum Deterministischen Chaos:

- [122] Schuster, H.G. (1988) *Deterministic Chaos: An Introduction* (VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim, 2nd rev. edition).
- [123] Cvitanović, P. (1989) *Universality in Chaos* (Adam Hilger, Bristol and New York, 2nd edition).
- [124] Ott, E., Sauer, T. & Yorke, J.A. (1994) *Coping with Chaos* (John Wiley & Sons, New York).
- [125] Ott, E. (1993) *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, Cambridge).
- [126] Ruelle, D. (1989) *Chaotic Evolution and Strange Attractors* (Cambridge University Press, Cambridge).
- [127] Ruelle, D. (1991) *Chance and Chaos* (Princeton University Press, New Jersey; deutsch: *Zufall und Chaos*, Springer, Berlin, 1992).
- [128] Stewart, I. (1989) *Does God Play Dice?* (Penguin books, London).
- [129] Lasota, A. & Mackay, M.C. (1994) *Chaos, Fractals, and Noise: Stochastic Aspects of Dynamics* (Springer, New York, 2nd edition, 1st edition 1985 *Probabilistic Properties of Deterministic Systems*, Cambridge University Press, Cambridge).
- [130] Beck, C. & Schlögel, F. (1993) *Thermodynamics of chaotic systems: An introduction* (Cambridge University Press, Cambridge).
- [131] Guckenheimer, J., & Holmes, P. (1983) *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer, New York).
- [132] Jetschke, G. (1989) *Mathematik der Selbstorganisation: Qualitative Theorie nichtlinearer Dynamischer Systeme und gleichgewichtsferner Strukturen in Physik, Chemie und Biologie* (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaft, Berlin, und Vieweg, Braunschweig).
- [133] Arrowsmith, D.K. & Place, C.M. (1990) *An introduction to dynamical systems* (Cambridge University Press, Cambridge).
- [134] Leven, R.W., Koch, B.-P. & Pompe, B. (1989) *Chaos in Dissipativen Systemen* (Akademie-Verlag, Berlin, und Vieweg, Braunschweig).
- [135] Honerkamp, J. (1990) *Stochastische Dynamische Systeme* (VCH Verlag, Weinheim).
- [136] van Kampen, N.G. (1992). *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (North-Holland, Amsterdam, rev. and enl. edition).

- [137] Liebert, W. (1991). *Chaos und Herzdynamik* (Verlag Harry Deutsch, Frankfurt am Main).

Lehrbücher zur Neurobiologie und zu Neuronalen Netzen:

- [138] Ramón y Cajal, S. (1904) *Textura del sistema nervioso del hombre y de los vertebrados*, Tomo II, Imprenta Nicolás Moya, Madrid.
- [139] Ramón y Cajal, S. (1911) *Histologie du Système Nerveux* (Paris).
- [140] Shepherd, G.M. (1990) *The synaptic organization of the brain*, 3rd ed. (Oxford University Press, New York, Oxford).
- [141] Kandel, E.R., Schwartz, J.H. & Jessel, T.M. (1992) *Neurowissenschaften: eine Einführung* (Spektrum Verlag, Heidelberg; in engl.: "Essentials of Neural Sciences and Behavior" (1995), Appleton & Lange).
- [142] Traub, R.D. & Miles, R. (1991) *Neuronal networks of the hippocampus* (Cambridge University Press, Cambridge).
- [143] Churchland, P.S. (1986) *Neurophilosophy: Toward a Unified Science of the Mind-Brain* (MIT Press, Cambridge, Massachusetts).
- [144] Hertz, J., Krogh, A., & Palmer, R.G., (1991) *Introduction to the theory of neural computation* (Addison-Wesley).
- [145] Rojas, R., (1993) *Theorie der neuronalen Netze* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg).

weitere Lehrbücher:

- [146] Rényi, A. (1962) *Wahrscheinlichkeitsrechnung* (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin).
- [147] Stratonovich, R.L. (1963) *Topics in the Theory of Random Noise, Vol. I, General Theory of Random Processes, Nonlinear Transformation of Signals and Noise* (Gordon & Breach Science Publishers, New York, London).
- [148] Schlittgen, R., & Streitberg, B.H.J. (1995) *Zeitreihenanalyse* (Oldenbourg-Verlag, München, 6. Auflage).
- [149] Box, G.E.P., & Jenkins, G.M. (1970) *Time Series Analysis, Forecasting and Control* (Holden-Day, San Francisco).
- [150] Brigham, E.O. (1974) *The Fast Fourier Transform* (Prentice-Hall).
- [151] Haken, H. (1980) *Einführung in die Synergetik*, (Springer-Verlag, Berlin).
- [152] Hofbauer, J., & Sigmund, K. (1984) *Evolutionstheorie und Dynamische Systeme: Mathematische Theorie der Selektion* (Verlag Paul Paray, Berlin, Hamburg).
- [153] Tong, H. (1990) *Non-linear Time Series, A Dynamical Systems Approach* (Clarendon Press, Oxford).
- [154] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. & Flannery, B.P. (1992) *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing* (2nd edition, Cambridge University Press).
- [155] Prudnikov, A.P., Brychkov, Yu.A., & Marichev, O.I. (1992) *Integrals and Series* (Gordon and Breach, New York).
- [156] Heuser, H. (1984) *Lehrbuch der Analysis, Teil 1* (B.G. Teubner, Stuttgart, 3. Auflage).
- [157] Heuser, H. (1986) *Lehrbuch der Analysis, Teil 2* (B.G. Teubner, Stuttgart, 2. Auflage).
- [158] Heuser, H. (1986) *Funktionalanalysis* (B.G. Teubner, Stuttgart, 2. Auflage).
- [159] Combes, J. M., Grossmann, A., & Tchamitchian, P. (1989): Wavelets, Proceedings of the International Conference, Marseille, France, Dec. 1987, Springer, Berlin, Heidelberg.

Forschungszentrum Jülich



Jül-3491
Januar 1998
ISSN 0944-2952